UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL
5866-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

58. BAND, 1. HEFT
MIT 1 TEXTABBILDUNG
AUSGEGEBEN IM APRIL 1954)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1954

77
Mh. Math.
-54

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

58. Band/1. Heft **Inhaltsverzeichnis**

Seite

Cooke, J. C. Note on some Integrals of Bessel Functions with respect to their Order 1

Carlitz, L. Certain Special Equations in a Finite Field 5

Brauner, H. Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in halbachsiale Lage 13

Pinl, M. Über die Gaußsche Krümmung der reellen Minimalflächen im R_4 . 27

Schmetterer, L. Zum Sequentialverfahren von *Robbins* und *Monro* 33

Wolff, K. H. Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum (R_4) 38

Wunderlich, W. Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades 57

Buchbesprechungen 63

Note on some Integrals of Bessel Functions with respect to their Order.

By

J. C. Cooke, Singapore.

(Received May 29, 1953.)

In what follows we take Φ to be real and the paths of integration to be straight lines.

We consider first as an illustration a simple case of a result of *Ramanujan* (1).

We start with

$$J_\mu(z)\,J_\nu(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)\cos(\mu-\nu)\theta\,d\theta$$

where $R(\mu+\nu) > -1$, by *Watson* (2) page 150.

We write $\mu = \alpha+\xi$, $\nu = \beta-\xi$, $2\theta = t$, multiply by $\cos\Phi\xi$, and integrate with respect to ξ from $-\infty$ to ∞.

This gives

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\alpha+\xi}(z)J_{\beta-\xi}(z)\cos\Phi\xi\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\Phi\xi\,d\xi\int_0^{\pi} J_{\alpha+\beta}(2z\cos\tfrac{1}{2}t)\cos\{\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)+\xi\}t\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\Phi\xi\,d\xi\int_0^{\pi} J_{\alpha+\beta}(2z\cos\tfrac{1}{2}t)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)t\cos\xi t\,dt$$

$$= \cos\frac{1}{z}(\alpha-\beta)\,\Phi\,J_{\alpha+\beta}(2z\cos\tfrac{1}{2}\Phi),\ \text{if}\ |\Phi|<\pi,\ \text{or}$$

$$= 0,\ \text{if}\ \Phi\ \text{has any other value.}$$

by *Fourier*'s integral theorem, provided $R(\alpha+\beta) > 0$ if $|\Phi| = \pi$, and $R(\alpha+\beta) > -1$ otherwise.

This result is well-known as is also the corresponding result with $\sin\Phi\xi$ instead of $\cos\Phi\xi$.

Several other results may be obtained by the same method. We give three examples.

By *Watson* (2) page 181, we have

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cos h\,\nu t\,dt$$

if $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

We write $\nu = a + ib$ where a and b are real, and obtain

$$K_{a+ib}(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}(\cosh at\cos bt + i\sinh at\sin bt)\,dt,$$

and so

$$K_{a+ib}(z) + K_{a-ib}(z) = 2\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh at\cos bt\,dt.$$

Multiply by $\cos \Phi b$ and integrate with respect to b. This gives

$$\int_0^\infty \{K_{a+ib}(z)+K_{a-ib}(z)\}\cos\Phi b\,db = 2\int_0^\infty \cos\Phi b\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh at\cos bt\,dt$$
$$= \pi e^{-z\cosh\Phi}\cosh a\,\Phi,$$

or

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_\xi(z)\cosh(\xi - a)\,\Phi\,d\xi = i\pi e^{-z\cosh\Phi}\cosh a\,\Phi. \tag{1}$$

Similarly we have

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_\xi(z)\sinh(\xi - a)\,\Phi\,d\xi = -\pi e^{-z\cosh\Phi}\sinh a\,\Phi; \tag{2}$$

and in particular

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K_\xi(z)\,d\xi = i\pi e^{-z}. \tag{3}$$

The results (1), (2) and (3) hold if $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

Our second exemple involves the function I.

By *Watson* (2) page 181, if $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, or $|\arg z| = \frac{1}{2}\pi$ if $R(\xi) > 0$

$$I_\xi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos\theta\,\xi\,d\theta - \frac{\sin\xi\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\cosh t - \xi t}\,dt,$$

and so

$$\int_0^\infty I_\xi(z)\cos\Phi\xi\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\Phi\xi\,d\xi\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos\theta\,\xi\,d\xi\,d\theta -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\pi\xi\cos\Phi\xi\,d\xi\int_0^\infty e^{-z\cosh t - \xi t}\,dt.$$

We therefore have

$$\int_0^\infty I_\xi(z)\cos\Phi\,\xi\,d\xi = \tfrac{1}{2}e^{z\cos\Phi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{\pi+\Phi}{(\pi+\Phi)^2+t^2} + \frac{\pi-\Phi}{(\pi-\Phi)^2+t^2}\right\} e^{-z\cosh t}\,dt, \tag{4}$$

if $|\Phi| < \pi$; the first term is replaced by $\frac{1}{4}e^{-z}$ if $|\Phi| = \pi$, and by zero otherwise.

The inversion of the order of integration involved here is legitimate.

In particular

$$\int_0^\infty I_\xi(z)\,d\xi = \frac{1}{2}e^z - \int_0^\infty \frac{e^{-z\cosh t}}{\pi^2+t^2}\,dt. \tag{5}$$

It does not seem possible to evaluate the integral on the right hand side in closed form, though it is easy to obtain a numerical value for it for any z satisfying $|\arg z| \leqq \frac{1}{2}\pi$, which is the condition that the results (4) and (5) hold.

We give one final example.

The *Anger* associated function **J** given by

$$\mathbf{J}_\xi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\theta\,\xi - z\sin\theta)\,d\theta \tag{6}$$

as in *Watson* (2) page 308, leads to

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_\xi(z)\cos\Phi\,\xi\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\Phi\,\xi\,d\xi \int_0^\pi \cos\theta\,\xi\cos(z\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \cos(z\sin\Phi), \text{ if } |\Phi| < \pi, \text{ or}$$

$$= 1/z, \text{ if } |\Phi| = \pi, \text{ or}$$

$$= 0, \text{ otherwise.}$$

Similarly

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_\xi(z)\sin\Phi\,\xi\,d\xi = \sin(z\sin\Phi) \text{ if } |\Phi| < \pi, \text{ or}$$

$$= 0, \text{ otherwise.}$$

In particular we have the simple and somewhat surprising result

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_\xi(z)\,d\xi = 1,$$

whatever be the value of z.

Other examples could be given but these seem to be of greatest interest. Those of *Ramanujan* have been used in connection with the transmission of electric waves. (3) (4).

References.

(1) *Ramanujan, S.*: *Quart. Journ. Math.* 48 (1920) 294
or *Collected Papers* (Camb. 1927), 216.

(2) *Watson, G. N.*: *Theory of Bessel Functions* (Camb. 1948).

(3) *March, H. W.*: *Ann der Phys.* (4) 37 (1912), 29.

(4) *Rybczynski, W. von*: *Ann der Phys.* (4) 41 (1913), 191.

Certain Special Equations in a Finite Field.

By

L. Carlitz, Duke University, Durham, N. C.

(Received June 22nd, 1953.)

1. Let $q = p^n$, $p > 2$, and let $GF(q)$ as usual denote the finite field of order q. The numbers of $GF(q)$ will be denoted by the italic letters $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$.

For $a \varepsilon GF(q)$ we define $\psi(a) = +1, -1, 0$ according as a is a square, a non-suare or zero of $GF(q)$. Thus, in particular for $n = 1$, $\psi(a)$ reduces to the Legendre symbol (a/p).

We consider first the equation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 2dxyz + e, \tag{1.1}$$

where

$$abcd \neq 0, \tag{1.2}$$

but e is arbitrary. If $d = 0$, the number of solutions of (1.1) is determined by a well known theorem, while if $abc = 0$, it is again not difficult to find the number of solutions. We now prove

Theorem 1. *The number of solutions* (x, y, z) *of equation* (1.1) *subject the condition* (1.2) *is determined by*

$$q^2 + 1 + q\{\psi(a) + \psi(b) + \psi(c) + \psi(e)\}\psi(d^2e - abc). \tag{1.3}$$

Proof. We rewrite the equation (1.1) in the form

$$(cz - dxy)^2 = d^2x^2y^2 - acx^2 - bcy^2 + ce$$

Then if we put $w = cz - dxy$ it is clear that the number of solutions of (1.1) is the same as the number of solutions of

$$w^2 = d^2x^2y^2 - acx^2 - bcy^2 + ce. \tag{1.4}$$

In the next place, using the function $\psi(x)$ defined above, the number of solutions of (1.4) is equal to

$$\sum_{x, y} \{1 + \psi(d^2x^2y^2 - acx^2 - bcy^2 + ce)\}. \tag{1.5}$$

Now consider the sum

$$S = \sum_{x,\,y} \{\psi(d^2x^2 - bc)\, y^2 - c(ax^2 - e)\}. \tag{1.6}$$

We shall make repeated use of the easily proved formula [1]

$$\sum_{y} \psi(y^2 + a) = -1 \qquad (a \neq 0), \tag{1.7}$$

valid for all non-zero $a \in GF(q)$. It is clear from (1.6) that

$$S = \sum_{\substack{d^2x^2 \neq bc \\ ax^2 \neq e}} \sum_{y} \psi\{(d^2x^2 - bc)\, y^2 - c(ax^2 - e)\} + \tag{1.8}$$

$$+ \sum_{ax^2 = e} \sum_{y} \psi\{(d^2x^2 - bc)\, y^2\} + \sum_{d^2x^2 = bc} \sum_{y} \psi\{c(ax^2 - e)\}.$$

For brevity we write this as $S = S_1 + S_2 + S_3$. By (1.7) we have

$$S_1 = \sum_{\substack{d^2x^2 \neq bc \\ ax^2 \neq e}} \psi(d^2x^2 - bc) \sum_{y} \psi\left\{y^2 - y^2 - \frac{c(ax^2 - e)}{d^2x^2 - bc}\right\}$$

$$= -\sum_{\substack{d^2x^2 \neq bc \\ ax^2 \neq e}} \psi(d^2x^2 - bc) = -\sum_{ax^2 \neq e} \psi(d^2x^2 - bc)$$

$$= -\sum_{x} \psi(d^2x^2 - bc) + \sum_{ax^2 = e} \psi(d^2x^2 - bc$$

Again using (1.7) we get

$$S_1 = 1 + \sum_{ax^2 = e} \psi(d^2x^2 - bc). \tag{1.9}$$

In the second place it is clear that

$$S_2 = (q-1) \sum_{ax^2 = e} \psi(d^2x^2 - bc). \tag{1.10}$$

But

$$\sum_{ax^2 = e} \psi(d^2x^2 - bc) = \{1 + \psi(ae)\}\, \psi\{a(d^2e - abc)\}$$

$$= (\psi(a) + \psi(e))\, \psi(d^2e - abc).$$

Thus (1.9) and (1.10) imply

$$S_1 + S_2 = 1 + q(\psi(a) + \psi(e))\, \psi(d^2e - abc). \tag{1.11}$$

In the next place we have

$$S_3 = \sum_{d^2x^2 = bc} \sum_{y} \psi\{-c(ax^2 - e)\}$$

$$= q\{1 + \psi(bc)\}\, \psi\{c(d^2e - abc)\}$$

$$= q(\psi(b) + \psi(c))\, \psi(d^2e - abc). \tag{1.12}$$

Hence (1.11) and (1.12) yield

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 1 + q\{\psi(a) + \psi(b) + \psi(c) + \psi(e)\}\, \psi(d^2e - abc)$$

and in view of (1.5), (1.3) follows at once.

2. It may be of interest to mention a few special cases of Theorem 1. We note first that by multiplying by a properly chosen non-zero number of $GF(q)$ and permuting the unknowns, the equation (1.1) can be reduced to one of the following types:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,dxyz + e \tag{2.1}$$

or

$$x^2 + y^2 + cz^2 = 2\,dxyz + e \qquad (\psi(c) = -1), \tag{2.2}$$

where $d \neq 0$ but e is arbitrary. Then by (1.3) the number of solutions of (2.1) is equal to

$$q^2 + 1 + q\,(3 + \psi(e))\,\psi(d^2e - 1), \tag{2.3}$$

while the number of solutions of (2.2) is equal to

$$q^2 + 1 + q\,(1 + \psi(e))\,\psi(d^2e - c). \tag{2.4}$$

In the next place we remark that for $n = 1$ it follows at once from the theorem that the number of solutions of the congruence

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv dxyz + e \pmod{p},$$

where $abcd \not\equiv 0 \pmod{p}$, is equal to

$$p^2 + 1 + p\left\{\left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{b}{p}\right) + \left(\frac{c}{p}\right) + \left(\frac{e}{p}\right)\right\}\left(\frac{d^2e - abc}{p}\right). \tag{2.5}$$

Returning to the general case it is evident that when $d^2e = abc$, the number of solution of the equation (1.1) is equal to

$$q^2 + 1. \tag{2.6}$$

Also when $\psi(a) + \psi(b) + \psi(c) + \psi(e) = 0$, the number of solutions of (1.1) is furnished by (2.6).

We also remark that (1.3) indicates that the number of solutions of (1.1) is congruent to 1 (mod q) and is therefore positive. Indeed it can equal 1 only when $q = 3$, $e = 0$. In general if N denotes the number of solutions of (1.1) we have the inequality

$$|N - q^2 - 1| \leqq 4q. \tag{2.7}$$

3. We turn next to the equation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 2\,exyzt + 2f, \tag{3.1}$$

where we assume

$$a\,b\,c\,d\,e \neq 0. \tag{3.2}$$

If we put $w = dt - exyz$, it is evident that the number of solutions of (3.1) is the same as the number of solutions of

$$w^2 = e^2x^2y^2z^2 - adx^2 - bdy^2 - cdz^2 + 2\,df. \tag{3.3}$$

Clearly the number of solutions of (3.3) is to

$$q^3 + T, \tag{3.4}$$

where

$$T = \sum_{x,y,z} \psi(e^2x^2y^2z^2 - adx^2 - bdy^2 - cdz^2 + 2df). \tag{3.5}$$

To evaluate T we write

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \tag{3.6}$$

where

$$T_1 = \sum_{\substack{e^3x^3y^3 \neq cd \\ ax^3+by^3 \neq 2f}} \sum_z \psi\{(e^2x^2y^2 - cd)z^2 - d(ax^2 + by^2 - 2f)\},$$

$$T_2 = q \sum_{e^3x^3y^3=cd} \psi\{-d(ax^2 + by^2 - 2f)\},$$

$$T_3 = (q-1) \sum_{ax^3+by^3=2f} \psi(e^2x^2y^2 - cd).$$

While T_1 and T_2 may perhaps have some terms in common, these necessarily vanish and may therefore be irgnored.

Now by (1.7) we have

$$T_1 = \sum_{\substack{e^3x^3y^3 \neq cd \\ ax^3+by^3 \neq 2f}} \psi(e^2x^2y^2 - cd) \sum_z \psi\left\{z^2 - \frac{d(ax^2 + by^2 - 2f)}{e^2x^2y^2 - cd}\right\}$$

$$= -\sum_{ax^3+by^3 \neq 2f} \psi(e^2x^2y^2 - cd)$$

$$= -\sum_{x,y} \psi(e^2x^2y^2 - cd) + \sum_{ax^3+by^3=2f} \psi(e^2x^2y^2 - cd)$$

$$= -q\psi(-cd) + q - 1 + \sum_{ax^3+by^3=2f} \psi(e^2x^2y^2 - cd).$$

Thus

$$T_1 + T_3 = -q\psi(-cd) + q - 1 + q \sum_{ax^3+by^3=2f} \psi(e^2x^2y^2 - cd). \tag{3.7}$$

In the next place

$$\sum_{ax^3+by^3=2f} \psi(e^2x^2y^2 - cd) = \sum_x \psi\left(e^2x^2 \frac{2f - ax^2}{b} - cd\right)\left\{1 + \psi\left(\frac{2f - ax^2}{b}\right)\right\}$$

$$= \sum_x \psi(ae^2x^4 - 2e^2fx^2 + bcd)\{\psi(-b) + \psi(ax^2 - 2f)\}.$$

But if $g(x)$ is an arbitrary polynomial with coefficients in $GF(q)$, we have

$$\sum_x g(x^2) = \sum_x (1 + \psi(x))\, g(x), \tag{3.8}$$

so that

$$\sum_{ax^2by^2=2f} \psi(e^2x^2y^2 - cd)$$

$$= \sum_x \psi(ae^2x^2 - 2e^2fx + bcd)\{\psi(-b) + \psi(ax - 2f)\}\{1 + \psi(x)\}$$

$$= \sum_x \psi(e^2x^2 - 2e^2fx + abcd)\{\psi(-b) + \psi(x - 2f)\}\{\psi(a) + \psi(x)\}$$

$$= \sum_x \psi\{(x-f)^2 + \frac{abcd}{e^2} - f^2\}\{\psi(-b) + \psi(x-2f)\}\{\psi(a) + \psi(x)\}$$

$$= \sum_x \psi(x^2 + \delta)\{\psi(-b) + \psi(x-f)\}\{\psi(a) + \psi(x+f)\}, \tag{3.9}$$

where for brevity we put

$$\delta = \frac{abcd}{e^2} - f^2. \tag{3.10}$$

As for T_2, we have, again using (3.8),

$$\sum_{e^2x^2y^2=cd} \psi\{-d(ax^2 + by^2 - 2f)\}$$

$$= \{1 + \psi(cd)\} \sum_{x \neq 0} \psi(-d)\,\psi\left(ax^2 + \frac{bcd}{e^2x^2} - f\right)$$

$$= (\psi(-c) + \psi(-d)) \sum_{x \neq 0} \psi(ae^2x^4 - 2e^2fx + bcd)$$

$$= (\psi(-c) + \psi(-d)) \sum_{x \neq 0} (1 + \psi(x))\,\psi(ae^2x^2 - 2e^2fx + bcd)$$

$$= (\psi(-ac) + \psi(-ad) \sum_{x \neq 0} (\psi(a) + \psi(x))\,\psi(e^2x^2 - 2e^2fx + bcd)$$

$$= (\psi(-ac) + \psi(-ad)) \sum_x (\psi(a) + \psi(x+f))\,\psi(x^2 + \delta)$$

$$- (\psi(-bd) + \psi(-bc)). \tag{3.11}$$

Substituting from (3.9) and (3.11) in (3.7) and (3.6) we get after a little manipulation

$$T = -q\{\psi(-bc) + \psi(-cd) + \psi(-bd)\} + (q-1)$$

$$+ q\{\psi(-ab) + \psi(-ac) + \psi(-ad)\} \sum_x \psi(x^2 + \delta)$$

$$+ q\{\psi(-a) + \psi(-b) + (-c) + \psi(-d)\} \sum_x \psi\{(x+f)(x^2+\delta)\}$$

$$+ q \sum_x \psi\{(x^2 - f^2)(x^2 + \delta)\}. \tag{3.12}$$

It is now convenient to consider separately the cases (*i*) $\delta \neq 0$, (*ii*) $\delta = 0$. In case (*i*), (3.12) becomes on using (1.7)

$$T = -q\{\psi(-ab) + \ldots + \psi(-cd)\} + (q-1)$$
$$+ q\{\psi(-a) + \psi(-b) + \psi(-c) + \psi(-d)\} \sum_x \psi\{(x+f)(x^2+\delta)\}$$
$$+ q \sum_x \psi\{(x^2-f^2)(x^2+\delta)\}. \tag{3.13}$$

On the other hand in case (*ii*), again using (1.7) and the formula

$$\sum_x \psi(x+f) = 0,$$

it is easily verified that (3.12) reduces to

$$T = q(q-1)\{\psi(-ab) + \psi(-ac) + \psi(-ad)\}$$
$$- q\{\psi(-a) + \psi(-b) + \psi(-c) + \psi(-d)\}\psi(f)$$
$$- q\{1 + \psi(-1)\} + (q-1);$$

since $\delta = 0$ implies $\psi(abcd) = +1$, this becomes

$$T = \tfrac{1}{2}(q^2-2q)\{\psi(-ab) + \ldots + \psi(-cd)\}$$
$$- q\{\psi(-a) + \ldots + \psi(-d)\}\psi(f) - q\psi(-1) - 1. \tag{3.14}$$

Finally substituting from (3.13) and (3.14) in (3.4) we may state the following theorems.

Theorem 2. *The number of solutions of* (3.1), *where* $abcde \neq 0$ *and*

$$\delta = \frac{abcd}{e^2} - f^2 \neq 0,$$

is equal to $q^3 + T$, *where* T *is determined by* (3.13).

Theorem 3. *The number of solutions of* (3.1), *where* $abcde \neq 0$ *and* $\delta = 0$, *is equal to* $q^3 + T$, *where* T *is determined by* (3.14).

It may be remarked that by multiplying (3.1) by a properly chosen number of $GF(q)$ and permuting the unkowns, the coefficients in the left member of (3.1) can be reduced to one of the types

$$(1, 1, 1, 1), \quad (1, 1, 1, d), \quad (1, 1, d, d),$$

where $\psi(d) = -1$. Corresponding to each type the statement of Theorem 2 and 3 can be simplified slightly; note that the second type cannot occur when $\delta = 0$. We shall however not take the space to restate the theorems.

4. It is clear from (3.14) that when $\delta = 0$, Theorem 3 furnishes an explicit formula for the number of solutions of (3.1). On the other hand when $\delta \neq 0$, this number, in view of (3.13), depends on the sums

$$\sum_x \psi\{(x+f)(x^2+\delta)\}, \quad \sum_x \psi\{(x^2-f^2)(x^2+\delta)\}. \tag{4.1}$$

In certain cases at least these sums can be evaluated.

Let $f = 0$ so that $\delta = abcd/e^2$. Then the first of (4.1) reduces to

$$\Phi(\delta) = \sum_x \psi\{x(x^2 + \delta)\}. \tag{4.2}$$

Now in the first place

$$\Phi(\delta) = 0 \qquad (q \equiv 3 \pmod 4), \tag{4.3}$$

while for $q \equiv 1 \pmod 4$, it is not difficult to extend Jacobsthal's theorem [1] to obtain the following result. Let γ be a number of $GF(q)$ such that $\psi(\gamma) = -1$. Put $u = \frac{1}{2}\Phi(1)$, $v = \frac{1}{2}\Phi(\gamma)$; then

$$u^2 + v^2 = q, \qquad u \equiv -1 \pmod 4. \tag{4.4}$$

Moreover

$$2u = \Phi(1) \equiv -\binom{\frac{1}{2}(p-1)}{\frac{1}{4}(p-1)}^n \pmod p \tag{4.5}$$

It is clear that u is uniquely determined by means of (4.4) and (4.5).

As for the second sum in (4.1) we get

$$\sum_x \psi(x^3(x^2 + \delta)) = \sum_{x \neq 0} \psi(x^2 + \delta) = -1 - \psi(\delta).$$

Combining these results we find that Theorem 2 implies

Theorem 4. *The number of solutions of* (3.1) *with* $abcde \neq 0$, $f = 0$, $\delta = abcd/e^2$, $q \equiv 1 \pmod 4$, *is equal to*

$$q^3 - 1 - q\{\psi(ab) + \ldots + \psi(cd)\}$$
$$+ q\{\psi(a) + \ldots + \psi(d)\}\ \Phi(\delta) - q\psi(\delta),$$

where $\Phi(\delta)$ *is determined by* (4.4) *and* (4.5).

If $q \equiv 3 \pmod 4$ *then the number of solutions is equal to*

$$q^3 - 1 + q\{\psi(ab) + \ldots + \psi(cd)\} - q\psi(\delta).$$

Another case in which (3.13) simplifies considerably is

$$\psi(a) = \psi(b) = +1, \ \psi(c) = \psi(d) = -1,$$

so that we now get

$$T = 2q\psi(-1) + q - 1 + q \sum_x \psi\{(x^2 - f^2)(x^2 + \delta)\}.$$

Hence only the second sum in (4.1) occurs. By means of (3.8) this sum reduces to

$$\sum_x (1 + \psi(x))\psi((x - f^2)(x - \delta)) = -1 + \sum_x \psi\{x(x - f^2)(x + \delta)\}.$$

For a systematic treat of Jacobsthal sums see [2], [3].

5. The method used in §§ 1, 3 above may be applied to the general equation

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 = 2b\, x_1 x_2 \ldots x_r + c \qquad (5.1)$$

where $a_1 a_2 \ldots a_r b \neq 0$. The number of solutions of (5.1) is expressed in terms of such sums as

$$\sum_{x_1, \ldots, x_{r-3}} \psi\{f(x_1, \ldots, x_{r-3})\}$$

and

$$\sum_{x_1, \ldots, x_{r-3}} \psi\{(a_1 x_1^2 + \ldots + a_{r-3} x_{r-3}^2 - c) f(x_1, \ldots, x_{r-3})\},$$

where

$$f(x_1, \ldots, x_{r-3}) = b^2 (a_1 x_1^2 + \ldots + a_{r-3} x_{r-3}^2) - b^2 c x_1^2 \ldots x_{r-3}^2 + a_{r-2} a_{r-1} a_r$$

Unfortunately for $r \geqq 5$ these sums do not appear to simplify materially.

We temark that the equation

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 = 2b x_1 x_2 \ldots x_s + c \qquad (s > r) \qquad (5.2)$$

with $a_1 a_r \ldots a_r b \neq 0$, is reducible to (5.1). For assigning $x_{r+1}, \ldots, x_s$ arbitrary non-zero values, (5.2) immediately reduces to an equation of the form (5.1) while for $x_{r+1} \ldots x_s = 0$ we get the familiar quadratic equation $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 = c$.

References.

1 *E. Jacobsthal*, Über die Darstellung der Primzahlen der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 132 (1907), pp. 238—245.

2 *A. L. Whiteman*, Cyclotomy and Jacobsthal sums, American Journal of Mathematics, vol. 74 (1952), pp. 89—99.

3 *A. L. Whiteman*, Theorems analogous to Jacobsthal's Theorem, Duke Mathematical Journal, vol. 16 (1949), pp. 619—626.

Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in halbachsiale Lage.

Von

Heinrich Brauner, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

(Eingelangt am 1. Juli 1953.)

1. Problemstellung.

Für die Lageverhältnisse kollinearer Räume in vereinigter Lage ist die Anordnung der *Doppelelemente* ausschlaggebend. Im allgemeinen existieren vier Doppelpunkte, die ein Tetraeder bilden; die sechs Kanten desselben sind Doppelstrahlen. Eine Abzählung aller möglichen Lagen kollinearer Räume zueinander liefert, wenn man von der Identität und den singulären Fällen absieht, außer dem allgemeinen Fall noch *zwölf spezielle Lagen*[1]. In vier Sonderfällen treten sogar ∞^2 Doppelstrahlen auf, nämlich bei *zentraler Lage, achsialer Lage* sowie *parabolisch zentraler* und *parabolisch achsialer Lage.*

Die Frage, welche Kollineationen durch *kongruente Verlagerung* eines Raumes in eine dieser vier speziellen Lagen übergeführt werden können, und welche Bewegungen dies leisten, wurde in einer früheren Arbeit beantwortet[2].

Hier sollen nun vier weitere zusammengehörige Fälle untersucht werden, die durch das Auftreten von ∞^1 Doppelstrahlen ausgezeichnet sind: gemeint sind jene Kollineationen, die genau *eine* punktweise festbleibende Gerade e besitzen. Neben dieser existiert dann stets noch eine ebenenweise festbleibende Gerade f, nämlich die Gegenkante im Fixtetraeder. Die Ebenen durch e werden ebenso wie die Punkte auf f durch Projektivitäten $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ untereinander vertauscht. Die Strahlen, die

---

[1] *P. Muth*: Theorie und Anwendung der Elementarteilertheorie, Teubner (Leipzig), 1899, 217.

[2] *H. Brauner*: Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in achsiale Lage, Mh. Math. 57 (1953), 75.

die Punkte von e aus den Doppelpunkten von f projizieren, sind Doppelstrahlen und erfüllen zwei Büschel in den Doppelebenen von $\mathfrak{E}$. Das einfachste Beispiel für eine solche „*halbachsiale Lage*" ist eine Drehung um eine Achse e; die Fixgerade f ist dabei die Ferngerade der zu e normalen Stellung.

Je nach der Lage der Fixgeraden e und f und der Art der Projektivitäten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ unterscheiden sich vier Fälle, für die nachstehend jeweils eine normierte Darstellung in homogenen projektiven Koordinaten angeführt wird.

a) *Allgemein halbachsiale Kollineation*: e und f windschief, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ hyperbolisch oder elliptisch.

$$x' = \alpha x,\quad y' = \beta y,\quad z' = z,\quad t' = t \qquad (\alpha, \beta \neq 1) \qquad (1)$$

b) *Spezielle halbachsiale Kollineation*: e und f schneidend, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ hyperbolisch oder elliptisch.

$$x' = \alpha x + y,\quad y' = \alpha y,\quad z' = \alpha z,\quad t' = t \qquad (\alpha \neq 1) \qquad (2)$$

c) *Parabolisch halbachsiale Kollineation*: e und f windschief, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ parabolisch.

$$x' = \alpha x + y,\quad y' = \alpha y,\quad z' = z,\quad t' = t \qquad (\alpha \neq 1) \qquad (3)$$

d) *Spezielle parabolisch halbachsiale Kollineation*: e und f schneidend, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ parabolisch.

$$x' = \alpha x + y,\quad y' = \alpha y + z,\quad z' = \alpha z,\quad t' = \alpha t \qquad (\alpha \neq 1) \qquad (4)$$

Es soll nun die Frage geklärt werden, welche Kollineationen durch kongruente Verlagerung eines Raumes in eine dieser vier speziellen Lagen gebracht werden können, wobei wir uns auf reelle Kollineationen beschränken. Gleichzeitig wird auf jene kontinuierlichen Bewegungen eingegangen, die ein Raum ausführen kann, ohne daß die Eigenschaft der speziellen Lage zerstört wird.

2. Normallage, kongruent entsprechende Punktreihen.

Seien Σ und Σ' zwei kollineare Raumsysteme, ω und v' ihre Fernebenen. Diesen entsprechen im Fall einer echten Kollineation zwei eigentliche Ebenen ω' bzw. v, die „*Gegenebenen*", deren Ferngeraden einander zugeordnet sind. Es gibt dann genau zwei entsprechende Geraden h und h', die auf der Gegenebene ihres Raumes senkrecht stehen, die „*Hauptstrahlen*". Die in den projektiv aufeinander bezogenen Ebenenbüscheln h und h' (mindestens einfach) vorhandenen

Normalebenenpaare $\mu \perp \nu$ und $\mu' \perp \nu'$ werden die „*Hauptebenen*" von Σ bzw. Σ' genannt[3].

Bringt man die orthogonalen Ebenentripel μ, ν, υ bzw. ν', μ', ω' durch kongruente Verlagerung von Σ' zur Deckung, so sind nachher die Projektivitäten entsprechender Punkte auf $h = h'$ und entsprechender Ebenen um $h = h'$ involutorisch. Diese metrisch spezielle Lage der kollinearen Räume zueinander, die stets durch eine Bewegung von Σ' herstellbar ist, wird als „*Normallage*" bezeichnet[2] und im folgenden stets gleich als Ausgangslage vorausgesetzt.

Legt man in dieser Normallage in die Schnittgeraden von μ, ν, υ die Achsen eines kartesischen Normalkoordinatensystems x, y, z, so erscheint unter Verwendung der homogenisierenden Koordinate t die Kollineation in der Gestalt:

$$x' = \alpha y, \quad y' = \beta x, \quad z' = \gamma t, \quad t' = \delta z \qquad (\alpha\beta\gamma\delta \neq 0). \tag{5}$$

Von grundlegender Bedeutung für das aufgeworfene Problem sind jene geraden Punktreihen in Σ, denen in Σ' *kongruente* entsprechen, denn halbachsiale Lage wird durch Bewegung dann und nur dann herbeigeführt, wenn ein Paar kongruent entsprechender Reihen zur Deckung gelangt.

Auf der Suche nach solchen Reihen brauchen wegen der zugeordneten Fernpunkte nur Geraden in Betracht gezogen werden, die zur Gegenebene des betreffenden Raumes parallel sind. Fassen wir in Σ zunächst eine normale Treffgerade e des Hauptstrahles h ins Auge, festgelegt durch ihren Richtungswinkel φ gegen x und ihren Abstand q von der Verschwindungsebene υ ($z = 0$):

$$x : y = \operatorname{ctg}\varphi, \quad z : t = q. \tag{6}$$

Die entsprechende Gerade e' hat zufolge (5) die Gleichungen

$$x' : y' = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg}\varphi, \quad z' : t' = q' = \gamma : \delta q; \tag{7}$$

insbesonders gehört zum Punkt P ($\cos\varphi : \sin\varphi : q : 1$) der Punkt P' ($\alpha \sin\varphi : \beta \cos\varphi : \gamma : \delta q$), woraus der Ähnlichkeitsfaktor beim Übergang von e zu e' mit

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2 \cos^2\varphi} \,/\, \delta q$$

---

[3] *R. Sturm*: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Teubner (Leipzig), 1909, Bd. III, 182.

zu erkennen ist. Im Hinblick auf die Tatsache, daß jede zur Gegenebene parallele Ebene $z=qt$ im Rahmen der Kollineation nur eine affine Verformung erleidet, kann nun allgemein gesagt werden, daß *eine Gerade dann und nur dann kongruent transformiert wird, wenn sie zur Gegenebene parallel ist und überdies zwischen Abstand q und Richtung φ die Beziehung*

$$\delta^2 q^2 = \alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2 \cos^2\varphi \tag{8}$$

besteht. Da zu jedem Abstand q zwei (zu x spiegelbildliche) Richtungen und zu jeder Richtung φ zwei (gegengleiche) Abstände gehören, so gibt es durch jeden Raumpunkt und in jeder Ebene zwei Trägergeraden kongruent transformierter Reihen. Die Gesamtheit aller derartigen Geraden ist daher in Σ eine gewisse *Strahlkongruenz* $\mathfrak{K}$ vom Bündel- und Feldgrad 2, der in Σ' eine analoge Kongruenz $\mathfrak{K}'$ entspricht.

Zieht man zur Festlegung eines Kongruenzstrahles e außer φ und q noch den Abstand p vom Hauptstrahl (der z-Achse) heran, so schreibt er sich

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = p\,t, \quad z = q\,t. \tag{9}$$

Die Darstellung der entsprechenden Geraden e' lautet zufolge (5)

$$x' \beta \cos\varphi - y' \alpha \sin\varphi = -\frac{\alpha\beta p}{\delta q}\,t', \; z' = \frac{\gamma}{\delta q}\,t', \tag{10}$$

und deren Abstände betragen demnach

$$p' = \frac{-\alpha\beta p}{\delta q\sqrt{\alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2 \cos^2\varphi}}, \quad q' = \frac{\gamma}{\delta q}.$$

Mit Rücksicht auf (8) ergibt sich daraus — wenn man die Strecken p, p', q, q' absolut mißt —

$$p' : p = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\, q' : q, \tag{11}$$

in Worten: *Das Verhältnis der Abstände kongruent entsprechender Strahlen von den Hauptstrahlen ist proportional zum Verhältnis der Abstände von den Gegenebenen.*

3. Allgemein halbachsiale Kollineationen.

Soll durch *kongruente Verlagerung* eines von zwei kollinearen Räumen Σ, Σ' *halbachsiale* Lage hergestellt werden, so kommen für die Punkt-Fixgeraden nur kongruent entsprechende Geraden in Frage. Wählen wir zwei entsprechende Geraden e, e' aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ und bringen sie durch

Bewegung eines Raumes punktweise zur Deckung. Damit ist eine Punkt-Fixgerade geschaffen. Die Projektivität entsprechender Ebenen um $e = e'$ wird i. a. zwei Doppelebenen besitzen; jede von ihnen trägt eine Zentralkollineation mit $e = e'$ als Achse; die zugehörigen Zentren bestimmen eine i. a. zu $e = e'$ windschiefe Fixgerade $f = f'$, die offenbar ebenenweise festbleibt: es liegt somit *halbachsiale Lage* vor.

Abgesehen von den möglichen Sonderfällen, die noch genauer zu untersuchen sein werden, gilt demnach mit Rücksicht auf die ∞^2 Wahlmöglichkeiten für e und die ∞^1 zulässigen Drehungen um $e = e'$:

Satz 1: *Jede Kollineation läßt sich auf* ∞^3 *Arten durch Bewegung eines Raumes in halbachsige Lage bringen.*

Unter diesen sind *metrisch ausgezeichnete* vorhanden, deren Projektivität $\mathfrak{E}$ die symmetrische Involution ist, während die Projektivität $\mathfrak{F}$ als Ähnlichkeit auftritt. Man erhält sie, wenn man unter allen halbachsialen Lagen, die zu einer bestimmten Normallage gehören, jene aussucht, deren *Gegenebenen vereinigt* liegen. Ihre Punkt-Fixgeraden gehören dann den beiden Ebenen parallel zu den vereinigten Gegenebenen durch die beiden Doppelpunkte auf dem Hauptstrahl $h = h'$ an. Sie sind reell, wenn die Punktinvolution auf $h = h'$ hyperbolisch ist, was o. B. d. A. vorausgesetzt werden kann. In jeder dieser Ebenen liegen zwei Strahlen der Kongruenz $\mathfrak{K}$, die den Hauptstrahl treffen. Dreht man den Raum Σ' um h' so lange, bis in einer dieser Ebenen zwei entsprechende Strahlen sich punktweise decken, so decken sich in der zur Gegenebene symmetrischen Ebene zwei andere als Ganzes so, daß entsprechende Punkte zum Hauptstrahl symmetrisch liegen. Die so erzeugten halbachsialen Lagen — es gibt deren offenbar vier — sind in obiger Weise metrisch ausgezeichnet. Diese Lagen, die im Falle zentralkollinearer Räume nicht existieren, sind bei einer Normallage, die zu achsialen Räumen gehört, selbst achsial.

Vom *affingeometrischen* Standpunkt aus interessieren jene halbachsialen Kollineationen, die eine unendlich ferne Fixgerade besitzen. Falls keine Affinität vorliegt, ist nur die Punkt-Fixgerade e unendlich fern möglich; e muß dann in die Ferngerade der Gegenebene fallen und auf ihr bleiben auch die absoluten Punkte fest, d. h. aber, die Parallelebenenscharen zu den Gegenebenen in den beiden Räumen sind ähnlich aufeinander bezogen. Sucht man aus diesen Scharen entsprechende kongruente Ebenen heraus und bringt sie zur Deckung, so liegt *zentralkollineare* Lage vor. Umgekehrt ist die Bedingung ausreichend

für die Existenz von halbachsigen Lagen mit unendlich ferner Punkt-Fixgeraden; man braucht nur ausgehend von Normallage durch eine Drehung um den Hauptstrahl die entsprechenden Hauptebenen μ, μ' und ν, ν' zur Deckung bringen.

Die halbachsialen Lagen mit einer unendlich fernen Fixgeraden gehören zu zentralkollinearen Räumen.

Liegt zwischen den beiden Raumsystemen Σ und Σ' eine *affine Zuordnung* vor, so erkennt man leicht, daß stets halbachsiale Lage durch Bewegung eines Raumes herstellbar ist, bei der *eine* der beiden Fixgeraden unendlich fern ist. Liegen dagegen *beide* Fixgeraden in der Fernebene, so lassen sich die beiden Räume auch in *zentralaffine* Lage bringen.

4. Spezielle halbachsiale Kollineationen.

In diesem Fall ist die Zentralkollineation in einer der beiden Doppelebenen der Projektivität $\mathfrak{E}$ um die Punkt-Fixgerade *parabolisch*, d. h. in dieser Doppelebene liegt das Zentrum der Kollineation auf der Punkt-Fixgeraden; die Ebenen-Fixgerade schneidet die Punkt-Fixgerade in diesem Punkt.

Wir gehen von kollinearen Räumen Σ, Σ' aus und wählen zwei entsprechende Strahlen e, e' aus den Kongruenten $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$. Zwischen je zwei entsprechenden Ebenen π, π' durch e und e' besteht ein Kollineation, so zwar, daß bei Aufeinanderlegen von e und e' zentralkollineare Lage entsteht. Das Kollineationszentrum geht dabei aus zwei sogenannten *Brennpunkten* der Ebene hervor[4].

Bezeichne i den absoluten Kegelschnitt des Raumes Σ, und j das — in der Gegenebenen v liegende — Urbild des absoluten Kegelschnittes j' von Σ'; sind ferner I_1 und I_2 bzw. J_1 und J_2 die konjugiert imaginären Schnittpunkte einer reellen Ebene π mit den nullteiligen Kegelschnitten i bzw. j, dann versteht man unter den *Brennpunkten* von π die „Laguerreschen Vertreter" des Punktepaares J_1, J_2, also die reellen Schnittpunkte $R = I_1 J_1 \,.\, I_2 J_2$ und $S = I_1 J_2 \,.\, I_2 J_1$. Die in π gelegenen *Strahlbüschel* R und S werden durch die Kollineation *kongruent* transformiert, da die in ihnen enthaltenen Minimalstrahlen $I_1 J_1$ usf. wieder zu Minimalstrahlen $I_1' J_1'$ usf. werden. Die R und S zugeordneten Punkte R' und S' sind demnach die Brennpunkte der π entsprechenden Ebene π'. —

[4] *Th. Reye*: Die Geometrie der Lage, Kröner (Stuttgart), 1907, 4. Aufl., Bd. II, 253.

Die Brennpunkte sind symmetrisch bezüglich der Gegenachse $o = \pi v$ bzw. $u' = \pi' \omega'$ angeordnet und ihre Verbindungsgeraden $p = RS$ und $p' = R' S'$ stellen die *Hauptstrahlen* der kollinearen Ebenen π, π' dar.

Lassen wir die Ebene π unter Festhaltung der Punkte J_1, J_2 variieren, also ein *Büschel* mit der Achse $J_1 J_2$ durchlaufen, dann dreht sich das Brennpunktepaar R, S um diese Achse und beschreibt einen *Kreis* m-den Restschnitt der Minimalkegel $J_1 i$ und $J_2 i$. Machen wir das Analoge mit der entsprechenden Ebene π', so durchläuft π ein *Parallelbüschel* und das Brennpunktepaar R, S beschreibt eine *Hyperbel* n, das Urbild des Bahnkreises n' von R' und S'.

Durchläuft die Ebene π nunmehr ein die Gegenebene v enthaltendes *Parallelbüschel*, dann beschreibt das Brennpunktepaar R, S eine gewisse *Fläche* Φ, auf der offensichtlich je ∞^1 Kreise m und Hyperbeln n liegen. Da diese Kurven untereinander und wechselseitig je zwei Punkte gemein haben, wie leicht einzusehen ist, muß die Fläche Φ ein *Quadrik* sein, und zwar ein einschaliges Hyperboloid, da sie eine Schar von Hyperbeln trägt und die Kreisschar keinen reellen Nullkreis enthalten kann.

Hilfssatz: *Der Ort der Brennpunkte aller Ebenen, die zu einer der Gegenebene angehörenden Richtung parallel sind, ist ein einschaliges Hyperboloid, dessen Mittelpunkt in der Gegenebene liegt und das von den zu der gegebenen Richtung normalen Ebenen nach Kreisen geschnitten wird*[5].

Um jetzt die durch den Strahl e der Kongruenz $\mathfrak{K}$ gehenden Ebenen zu finden, die einen Brennpunkt auf e haben, braucht man nur das zur Richtung von e gehörige Hyperboloid Φ mit der Geraden e zu schneiden. Durch die beiden Schnittpunkte E_1, E_2 geht je ein Kreis der m-Schar, die zugehörigen Normalebenen ε_1, ε_2 sind die gesuchten Ebenen, für die E_1 bzw. E_2 je einen Brennpunkt abgeben.

Bringt man nunmehr die Punktreihe e mit der kongruenten Reihe e' zur Deckung und sorgt man durch passende Drehung dafür, daß gleichzeitig die kongruenten Strahlbüschel (E_1, ε_1) und (E_1', ε_1') oder (E_2, ε_2) und (E_2', ε_2') aufeinanderfallen, so ist *spezielle halbachsiale Lage* der kollinearen Räume Σ, Σ' durch bloße Bewegung herbeigeführt. Im Hinblick auf die ∞^2 zur Verfügung stehenden Geraden e aus $\mathfrak{K}$ gilt:

Satz 2: *Jede Kollineation läßt sich auf* ∞^2 *Arten durch Bewegung eines Raumes in spezielle halbachsiale Lage bringen.*

Dieser Sachverhalt möge noch rechnerisch bestätigt werden, wobei gleichzeitig die Realitätsfrage Aufklärung findet. Greifen wir aus den

[5] Diesen Hilfssatz verdanke ich einer Bemerkung von *W. Wunderlich*.

Kongruenzen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zwei entsprechende Strahlen e und e' heraus. Einer durch e

$$x \sin\varphi - y\cos\varphi = p\,t,\ z = q\,t \quad (\text{mit } \delta^2 q^2 = \alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi) \tag{9}$$

gehenden Ebene ε, festgelegt etwa durch ihren Winkel τ gegen den Hauptstrahl h,

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + z\,\mathrm{tg}\,\tau = (p + q\,\mathrm{tg}\,\tau)\,t, \tag{12}$$

entspricht die Ebene ε' mit der Gleichung

$$\frac{y'}{\beta}\sin\varphi - \frac{x'}{\alpha}\cos\varphi + \frac{t'}{\delta}\,\mathrm{tg}\,\tau = (p + q\,\mathrm{tg}\,\tau)\,\frac{z'}{\gamma}. \tag{13}$$

Deren Neigungswinkel τ' gegen den Hauptstrahl h' berechnet sich, indem man die Ebenengleichung in die Gestalt

$$x'\sin\varphi' - y'\cos\varphi' + z\,\mathrm{tg}\,\tau' = \ldots$$

bringt, aus der bilinearen Beziehung

$$\alpha\beta\,\mathrm{tg}\,\tau - \gamma\delta\,\mathrm{tg}\,\tau' + \alpha\beta\,p/q = 0, \tag{14}$$

die ein Ausdruck für die projektive Koppelung der Büschel e und e' ist.

Die Gegenachsen der kollinearen Beziehung zwischen den Ebenen ε und ε' sind die Schnittgeraden mit den Gegenebenen $z = 0$ bzw. $z' = 0$; sie haben von den Strahlen e bzw. e' die Entfernungen $q/\cos\tau$ bzw. $q'/\cos\tau' = \gamma/\delta\,q\cos\tau'$. Damit nun bei Aufeinanderlegen von ε und ε', wobei e mit e' punktweise zur Deckung kommt, eine *parabolische* Zentralkollineation entsteht, müssen die Gegenachsen symmetrisch zur Kollineationsachse $e = e'$ zu liegen kommen. Notwendig und hinreichend hierfür ist also die Gleichheit der genannten Abstände

$$\frac{q}{\cos\tau} = \pm\frac{\gamma}{\delta\,q\cos\tau'}. \tag{15}$$

Mit Rücksicht auf (14) ergibt sich dann für $\mathrm{tg}\,\tau$ eine quadratische Gleichung

$$\mathrm{tg}^2\tau\,(\delta^4 q^6 - \alpha^2\beta^2 q^2) - 2\,\mathrm{tg}\,\tau\,\alpha^2\beta^2 p\,q - \alpha^2\beta^2 p^2 - \gamma^2\delta^2 q^2 + \delta^4 q^6 = 0 \tag{16}$$

Diese Beziehung wird noch zu verwenden sein.

Zunächst liest man aus ihr als Bedingung für reelle Lösungen ab:

$$p^2 \geqq \frac{\delta^4}{\alpha^2\beta^2 q^2}\,(q^4 - \alpha^2\beta^2/\delta^4).(q^4 - \gamma^2/\delta^2). \tag{17}$$

Die Trägerebenen parabolischer Zentralkollineationen sind somit reell für alle Geraden der Kongruenz $\mathfrak{K}$ im Parallelstreifen begrenzt von den Ebenen $q^4 = \alpha^2\beta^2/\delta^4$, $q^4 = \gamma^2/\delta^2$. Außerhalb dieses Streifens muß (17) *erfüllt sein.*

5. Parabolisch halbachsiale Kollineationen.

Diese Kollineationen sind vor den allgemein halbachsialen Lagen dadurch ausgezeichnet, daß um die Punkt-Fixgerade $e = e'$ eine *parabolische* Ebenenprojektivität $\mathfrak{E}$ vorliegt. Um die Lage jener entsprechenden Ebenen, die im parabolischen Fall die Doppelebenen bilden, anzugeben, betrachten wir die *Strahlbüschel*, die sich als Schnitt der vereinigten Ebenenbüschel um $e = e'$ mit einer Ebene normal zur Geraden $e = e'$ ergeben (Abb. 1). Auf einem Kreis k durch das Büschelzentrum liegt eine Projektivität entsprechender Punkte vor, $D_1 = D_1'$ und $D_2 = D_2'$ sind die Doppelpunkte, U, V, U', V', die Schnittpunkte mit den Normalstrahlen des Büschels. Kann man durch Drehung des einen Büschels um $e = e'$ parabolische Lage herstellen, so ist diese Drehung ersetzbar durch Drehungen beider Büschel im zueiander entgegengesetzten Sinne vom halben Betrag wie die obige.

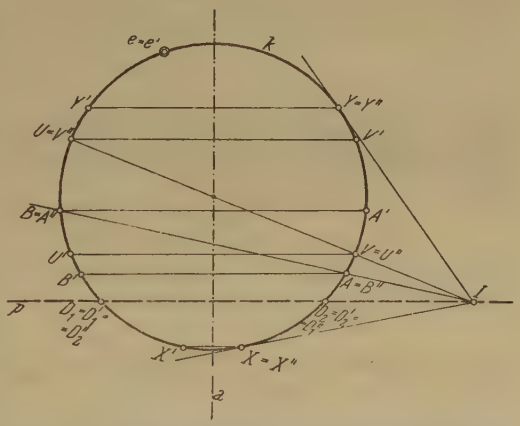

Abb. 1. Blick in Richtung der Punkt-Fixgeraden auf die Ebenenprojektivität $\mathfrak{E}$.

Die Doppelpunkte A, B einer so entstandenen Lage bekommt man als ein entsprechendes Punktepaar der Involution ($V = U''$, $U = V''$, $D_1 = D_2''$, $D_2 = D_1''$, $A = B''$, $B = A''$, ...), wobei die Punktreihe (U'', V'', D_2'', D_1'', B'', A'', ...) zur Punktreihe (U', V', D_2', D_1', B', A', ...) bezüglich der Symmetrieachse a spiegelbildlich liegt. Die neue Lage hat genau dann nur *einen* Doppelpunkt, wenn man einen Doppelpunkt $X = X''$ bzw. $Y = Y''$ dieser Involution herausgreift. Aus obiger Abb. folgt sofort:

Jene entsprechenden Ebenen, die nach einer bestimmten Drehung eines Büschels um die Trägergerade die Doppelebene einer parabolischen Lage liefern, bilden mit den Doppelebenen irgend einer Lage entgegengesetzt gleiche Winkel.

Man kann auf *zwei* wesentlich verschiedene Arten durch Drehung parabolische Lage herstellen.

Wendet man diese Tatsache auf jede Gerade der Kongruenz $\mathfrak{K}$ an, so ergibt sich:

Satz 3: *Jede Kollineation läßt sich auf ∞^2 Arten durch Bewegung eines Raumes in parabolisch halbachsiale Lage bringen.*

Für das Folgende interessiert die Lage jener einzigen Doppelebene für die einzelnen Geraden der Kongruenz $\mathfrak{K}$; dies soll analytisch untersucht werden. Verwendet man die gleichen Bezeichnungen wie in Abschnitt 4, so wird die Projektivität $\mathfrak{E}$ beschrieben durch:

$$\alpha\,\beta\,\mathrm{tg}\,\tau - \gamma\,\delta\,\mathrm{tg}\,\tau' + \alpha\,\beta\,p/q = 0. \tag{14}$$

Denkt man sich halbachsiale Lage mit parallelen Gegenebenen hergestellt, so gilt für die eine Doppelebene $\tau_1 = \tau_1' = \pi/2$, für die andere

$$\tau_2 = \tau_2' = \mathrm{arctg}\,\frac{p}{q}\,A, \tag{18}$$

wenn man $\dfrac{\alpha\,\beta}{\gamma\,\delta - \alpha\,\beta} = A$ setzt.

Die Doppelebene der parabolischen Lage ist nach oben dadurch bestimmt, daß sie und ihre entsprechende mit den Doppelebenen der Projektivität um $e = e'$ entgegengesetzt gleich Winkel bilden. Bezeichnet man die Winkel, die diese Ebenen festlegen, mit τ_0 bzw. τ_0', so ist diese symmetrische Lage gekennzeichnet durch

$$\tau_0 + \tau_0' = \tau_1 + \tau_2.$$

Geht man mit $\tau_0' = \tau_1 + \tau_2 - \tau_0$ in (14) ein, so ergibt sich unter Beachtung von (18):

$$\mathrm{tg}^2\,\tau_0 \,.\, A\,q^2 - 2\,\mathrm{tg}\,\tau_0 \,.\, A^2\,p\,q - (1 + A)\,q^2 - A^2\,p^2 = 0. \tag{19}$$

Damit ist auch die Frage nach der Realität geklärt, denn aus (19) ergibt sich als Bedingung für reelle Lösungen:

Satz 4: *Eine Kollineation kann durch Bewegung allein genau dann in parabolisch halbachsiale Lage gebracht werden, wenn die Punktprojektivität auf den Hauptstrahlen und die Ebenenprojektivität um die Hauptstrahlen gleichartig sind. Im anderen Fall kommt man nur mit gegensinnig kongruenten Transformationen aus.*

Greift man jene Punkt-Fixgeraden heraus, die den *Hauptstrahl treffen*, für die also $p = p' = 0$ gilt, so folgt aus (19), daß die einzigen Doppelebenen der parabolischen Lagen um diese Geraden gegen die

Gegenebenen *gleich geböscht* sind, wobei die Böschungen in Σ und Σ' — wie man leicht nachrechnet — *reziprok* sind.

Die Gleichung (19) zur Bestimmung von $\operatorname{tg} \tau_0$ versagt, wenn $\alpha\beta = \gamma\delta$ und $p = 0$ ist. In diesem Fall handelt es sich um eine den Hauptstrahl treffende Gerade der Kongruenz $\mathfrak{K}$, und zwar eines Raumes, der durch Bewegung in *achsiale* Lage zu bringen ist[2]. τ_0 wird dann *unbestimmt*, da in solchen Räumen jene Geraden zur Kongruenz der Trägergeraden *kongruent entsprechender Ebenenbüschel* gehören.

6. Spezielle parabolisch halbachsiale Lagen.

Diese Lage weist sowohl die Eigenschaften spezieller halbachsialer Lage auf, wie auch parabolisch halbachsialer Lage. In diesem Fall ist daher die Punkt-Fixgerade nicht mehr willkürlich aus der Kongruenz $\mathfrak{K}$ auswählbar, vielmehr muß sie *gleichzeitig* die Bedingungen (16) und (19) erfüllen:

$$\operatorname{tg}^2\tau\,(\delta^4 q^6 - \alpha^2\beta^2 q^2) - 2\operatorname{tg}\tau\,\alpha^2\beta^2 p\,q - \alpha^2\beta^2 p^2 - \gamma^2\delta^2 q^2 + \delta^4 q^6 = 0 \tag{16}$$

$$\operatorname{tg}^2\tau\,A\,q^2 - 2\operatorname{tg}\tau\,A^2 p\,q - A^2 p^2 - (1+A)\,q^2 = 0. \tag{19}$$

Multipliziert man (19) mit $-q^2\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta - \alpha\beta}$ und addiert dann (16), so sind die gesuchten Lösungen jedenfalls auch Lösung dieser neuen Gleichung, für die sich ergibt:

$$(1 + \operatorname{tg}^2\tau)\,(\delta^4 q^4 - \alpha\beta\gamma\delta) = 0, \tag{20}$$

d. h. aber es muß gelten:

$$q^4 = \alpha\beta\gamma\delta^{-3}. \tag{21}$$

Setzt man (21) in (16) und (19) ein, so gehen die beiden Gleichungen ineinander über, d. h. (21) stellt die gesuchte Bedingung für die brauchbaren Punkt-Fixgeraden dar. Reelle Lösungen liegen natürlich nur dann vor, wenn $\alpha\beta\gamma\delta > 0$ gilt.

Satz 5: *Jede Kollineation läßt sich durch kongruente Transformation in ∞^1 spezielle parabolisch halbachsiale Lage bringen, deren Punkt-Fixgeraden in den zur Gegenebene parallelen Ebenen $q^4 = \alpha\beta\gamma\delta^{-3}$ liegen. Nur wenn die Projektivitäten auf und um den Hauptstrahl gleichartig sind, genügen Bewegungen.*

7. Kinematische Ergänzungen.

Wie eine Parameterabzählung ergibt, existieren ∞^{12} halbachsiale Kollineationen; wendet man auf jede von ihnen die ∞^6 Bewegungen des Raumes an, so erhält man jede der ∞^{15} Kollineationen auf ∞^3 Arten. Es können daher auf eine halbachsiale Lage ∞^3 *Bewegungen* ausgeübt werden, ohne diese Eigenschaft zu zerstören. Läßt man zunächst — ausgehend von Normallage — die Gegenebenen der beiden Räume parallel, so erhält man ∞^2 Lagen, deren Punkt-Fixgeraden die Kongruenz $\mathfrak{K}$ durchlaufen; aus jeder dieser Lagen bekommt man durch Drehung um die Punkt-Fixgerade ∞^1 andere. Da die *Drehachsen* dieser Drehungen *bekannt*, die *Drehwinkel* aber *beliebig* sind, interessieren vor allem die zuerst genannten ∞^2 Lagen, deren *Gegenebenen parallel* sind.

Aus diesen ∞^2 Lagen entstehen auch die ausgezeichneten Fälle, wenn man den Drehwinkel um die Punkt-Fixgerade einen *bestimmten Wert* erteilt, der sich aus den Gleichungen (16) bzw. (19) errechnen läßt.

Zunächst greifen wir die ∞^1 halbachsialen Lagen mit *vereinigten Hauptstrahlen* heraus und untersuchen die einparametrige Bewegung, durch die diese ineinander übergeführt werden können.

Wir wählen in Normallage zwei entsprechende Strahlen e bzw. e' der Kongruenzen $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$, die die Hauptstrahlen treffen und bringen sie so punktweise zur Deckung, daß wir e' an einer Winkelsymmetrale der Richtungen von e und e' spiegeln — diese ist sogar eindeutig bestimmt. Für alle entsprechenden Kongruenzstrahlenpaare, die die Hauptstrahlen $h = h'$ treffen, durchläuft die Winkelsymmetrale eine Strahlfläche Γ, und zwar ein gerades Konoid um den Hauptstrahl. Die verschiedenen Lagen von Σ' entstehen also so, daß man Σ' an den Erzeugenden einer Strahlfläche Γ spiegelt, d. h. es liegt eine „*symmetrische Schrotung*" vor[6]. Das Konoid Γ der Winkelsymmetralen, die Grundfläche dieser Schrotung, erhält man wie folgt:

Dem Einheitszylinder Φ' um den Hauptstrahl h':

$$x'^2 + y'^2 = t'^2 \tag{22}$$

entspricht ein Kegel Φ:

$$(\beta\, x)^2 + (\alpha\, y)^2 = (\delta\, z)^2, \tag{23}$$

der Φ' in einer Kurve 4. Ordnung q trifft. q' sei die entsprechende in Σ'. Sei $P\,(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ein Punkt auf q, P' mit den Koordinaten $x_1' : y_1' : z_1' : t_1' = \alpha\, y_1 : \beta\, x_1 : \gamma\, t_1 : \delta\, z_1$ entspricht ihm und liegt auf q'.

[6] *J. Krames*: Über Fußpunktskurven von Regelflächen und einer besonderen Klasse von Raumbewegungen, Mh. Math. **45** (1937), 394.

Die kongruent entsprechenden Geraden durch P und P' werden dann durch die Spiegelung an der Winkelsymmetrale:

$$x : y = \left(\frac{x_1}{t_1} + \frac{x_1'}{t_1'}\right) : \left(\frac{y_1}{t_1} + \frac{y_1'}{t_1'}\right), \quad z : t = \tfrac{1}{2}\left(\frac{z_1}{t_1} + \frac{z_1'}{t_1'}\right) \tag{24}$$

punktweise zur Deckung gebracht. Aus (22), (23), (24) ergibt sich durch Elimination von $x_1\, x_1', \ldots t_1, t_1'$ die Gleichung der gesuchten Strahlfläche Γ:

$$t^2 (x^2+y^2)^2 (\alpha\beta - \gamma\delta)^2 + 4\delta [z\alpha\beta (x^2+y^2) - \gamma(\alpha+\beta)\, x\, y\, t] . [z\delta (x^2+y^2) - (\alpha+\beta)\, x\, y\, t] = 0 \tag{25}$$

Dieses Konoid ist eine *Fläche 6. Grades*, deren Fernkurve die Minimalstrahlen $x^2 + y^2 = 0$ zweimal enthält und die den Hauptstrahl zur vierfachen Erzeugenden hat.

Aus (25) ergeben sich die Bahnkurven c dieser Bewegung. Sie sind zu den Fußpunktkurven des Konoides Γ zentrisch ähnlich, wobei in Normallage der Punkt P' aus Σ', dessen Bahnkurve betrachtet wird, das Ähnlichkeitszentrum ist. Diese Fußpunktskurven ergeben sich als Schnitt der Grundfläche Γ mit Drehzylindern, die die Achse des Konoides enthalten. Aus den oben angeführten Gründen zerfallen diese Kurven 12. Ordnung in acht Erzeugende und eine nicht zerfallende *Kurve 4. Ordnung*. Die gesuchten Bahnkurven, auch von 4. Ordnung, sind alle zueinander *affin*, da sie durch achsiale Streckung vom Hauptstrahl aus ineinander übergehen. Die Bahnkurven jener Punkte, die vom Hauptstrahl gleiche Entfernung haben, sind kongruent und liegen auf einem Drehzylinder mit dem Hauptstrahl als Achse.

Satz 6: *Die ∞^1 halbachsialen Lagen mit vereinigtem Hauptstrahl gehen durch eine symmetrische Schrotung eines Raumes an einem Konoid 6. Ordnung ineinander über; die Bahnkurven dieser Bewegung, die auf koachsialen Drehzylindern verlaufen, sind von 4. Ordnung und gehen durch achsiale Streckung auseinander hervor.*

Gehört die Normallage zu *achsialen* Kollineationen ($\alpha\beta = \gamma\delta$), so reduziert sich Γ auf ein *Plückerkonoid* und die betrachtete Bewegung ist ein spezieller *DARBOUX'scher Umschwung*, nämlich eine *aufrechte Ellipsenbewegung* um den Hauptstrahl[2]. Bei *zentralkollinearen* Räumen ($\alpha = \pm\beta$) zerfällt Γ in zwei *Strahlbüschel*. In diesem Fall sind die Bahnkurven Kreise um den Hauptstrahl, d. h. es liegt eine *Drehung* um den Hauptstrahl vor.

Die oben angegebene Spiegelung an den Erzeugenden des Konoides Γ kann ersetzt werden durch folgende Transformationen:

1. Spiegelung am Mittelpunkt des Gemeinlotes der beiden ausgewählten Geraden e und e'; dadurch fallen beide in dieselbe Ebene.
2. Spiegelung an der Winkelsymmetrale der neuen Lage so zwar, daß sich die Geraden gegensinnig decken.
3. Spiegelung an dem Schnittpunkt der nun inzidenten Geraden mit dem Hauptstrahl.

Nach Ausführung von 2. liegen in der betreffenden Parallelebene zur Gegenebene ∞^1 parallele Geraden der Kongruenz $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$, von denen je zwei entsprechende durch eine Spiegelung an dem Mittelpunkt der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte punktweise zur Deckung gebracht werden können. Alle diese Mittelpunkte liegen auf einer Geraden, die den Hauptstrahl trifft und deren Richtung bestimmt ist durch die Stellung der Doppelebene der Projektivität entsprechender Ebenen um den Hauptstrahl $h = h'$ nach Ausführung des Schrittes 2., die nicht die kongruent entsprechenden Geraden enthält. Da die Doppelebenen mit den Normalebenen immer entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, so gilt für diese Richtungen $\bar{u}$ in Σ:

$$\bar{u} = \beta : \alpha\, u \tag{26}$$

wenn u die Richtung der kongruent entsprechenden Geraden angibt. Alle diese Geraden bilden daher eine Strahlfläche, deren Gleichung sich aus (8) und (26) ergibt zu:

$$\delta^2 z^2 (\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2) = \alpha^2 \beta^2 (x^2 + y^2). \tag{27}$$

Faßt man nun alle ∞^2 zu einer Normallage gehörigen halbachsialen Lagen mit *parallelen Gegenebenen* ins Auge, so beschreibt jeder Punkt aus Σ' beim Durchlaufen aller dieser Lagen eine *Bahnfläche*; alle Lagen des Punktes P' bei halbachsialen Lagen, deren Punkt-Fixgeraden in einer Parallelebene zu den Gegenebenen liegen, erfüllen also eine Gerade, die zu einer Erzeugenden obiger Strahlfläche parallel ist und durch einen Punkt der Bahnkurve c geht. Diese Bahnflächen sind somit *Strahlflächen* mit einer Richtebene und werden erzeugt durch eine Korrespondenz zwischen den Punkten der Bahnkurve c von 4. Ordnung und den Punkten der Ferngeraden der Gegenebenen. Aus (27) folgert man leicht, daß es sich um eine (2,2)-Korrespondenz handelt.

Satz 7: *Die ∞^2 halbachsialen Lagen, die zu einer bestimmten Normallage gehören und deren Gegenebenen parallel sind, gehen durch eine zweiparametrige Bewegung eines Raumes auseinander hervor, deren Bahnflächen Strahlflächen 10. Grades sind mit der Gegenebene als Richtebene; sie gehen alle durch achsiale Streckung vom Hauptstrahl aus ineinander über.*

Über die Gaußsche Krümmung der reellen Minimalflächen im R_4.

Von

M. Pinl, Dacca (Pakistan).

(Eingelangt am 14. Juli 1953.)

In einer Untersuchung „Über einen Satz von *L. Berwald* und die *Gauß*sche Krümmung der Minimalflächen"[1] wurde gezeigt: unter den *Eisenhart*schen Minimalflächen des euklidischen vierdimensionalen Raumes, R_4, gibt es keine mit konstanter nichtverschwindender *Gauß*scher Krümmung. Dabei handelt es sich um Minimalflächen, deren Erzeugende durch ebene in vollisotropen Ebenen des R_4 gelegene konjugiert-komplexe isotrope Kurven gegeben sind. Auf diesen Minimalflächen existieren keine *Study-Vessiot*schen Flächenparameter. Demgegenüber setzen wir im folgenden zunächst die Existenz *Study-Vessiot*scher Flächenparameter voraus und betrachten vorzugsweise allgemeine Minimalflächen des R_4 mit nichtebenen isotropen Erzeugenden:

$$\mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2), \quad \mathfrak{y}'^2 = \dot{\mathfrak{z}}^2 = 0, \quad \mathfrak{y}''^2 = \ddot{\mathfrak{z}}^2 = -1.$$

Im dreidimensionalen Raum folgt bekanntlich in dieser Normierung der Quadrate der zweiten Ableitungen $\mathfrak{y}''$ und $\ddot{\mathfrak{z}}$ für die *Gauß*sche Krümmung K der Minimalflächen die von *E. Study* angegebene Form $K = -\dfrac{1}{(\mathfrak{y}'\ \dot{\mathfrak{z}})^2}$. Für konstante *Gauß*sche Krümmung $K = -k^2$ ergibt sich so unmittelbar $\mathfrak{y}'\ \dot{\mathfrak{z}} = g_{12} = \text{const}$ und daher wegen $g_{11} = \mathfrak{y}'^2 = g_{22} = \dot{\mathfrak{z}}^2 = 0$ für K im Widerspruch zur Voraussetzung der Wert $k = 0$. Um dies Ergebnis auf euklidische Einbettungsräume beliebiger Dimensionszahl $n > 3$ zu verallgemeinern, müßte man für $n > 3$ die Existenz von isotropen Flächenparametern beweisen, in welchen die *Gauß*sche Krümmung der in Rede stehenden Minimalflächen die *Study*sche Form $-\dfrac{1}{{g_{12}}^2}$ annimmt. Nur dann könnte das Resultat der drei-

[1] Vgl. *M. Pinl*, Monatshefte für Mathematik **55**/3 (1951), S. 188—199.

dimensionalen Einbettung im Falle konstanter *Gauß*scher Krümmung für allgemeine Werte $n > 3$ behauptet werden. Während nun die Existenz solcher Parameter in R_3 unmittelbar durch die Einführung *Study-Vessiot*scher Flächenparameter auf der Minimalfläche bewiesen wird, ist im R_4 das Gegenteil der Fall: die *Gauß*sche Krümmung einer reellen Minimalfläche des R_4 gewinnt durch Verwendung *Study-Vessiot*scher Parameter als Flächenparameter nur dann die Form $K = -\frac{1}{g_{12}^2}$, wenn die Minimalfläche in einem linearen dreidimensionalen Unterraum liegt[2].

Aus diesem Grunde wie auch deshalb, weil wir im folgenden vornehmlich an reellen Minimalflächen interessiert sind, empfiehlt es sich, die Untersuchung der *Gauß*schen Krümmung der Minimalflächen in nicht isotropen Parametern zu führen. Wir wählen als solche isotherme Parameter u_1, u_2 und gewinnen eine Methode, welche für $n = 3$ wie auch für $n = 4$ zum Ziel führt.

§ 1. $n = 3$.

Der Realteil $\Re\, \mathfrak{y}\,(u) = \mathfrak{r}\,(u_1, u_2)$ des Ortsvektors einer isotropen Kurve $\mathfrak{y}\,(u)$ $(u = u_1 + i\,u_2)$ ist Ortsvektor einer auf isotherme Parameter u_1, u_2 bezogenen reellen Minimalfläche[3] mit der Metrik

$$g_{11} = g_{22} = \lambda\,(u_1, u_2),\ g_{12} = 0. \tag{1}$$

Da die mittlere Krümmung H auf $\mathfrak{r}$ verschwindet, sind erste und dritte Fundamentalform proportional und die *Gauß*sche sphärische Abbildung der Minimalfläche konform zu dieser:

$$K\,g_{ik} = -\,e_{ik},\ e_{ik} = \mathfrak{n}_i\,\mathfrak{n}_k,\ \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2}{|g_{ik}|^{1/2}} = \frac{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2}{\lambda},\quad i, k = 1, 2. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

---

[2] Vgl. (1), S. 195.

[3] Da $\mathfrak{y}\,(u) = \mathfrak{r}\,(u_1, u_2) + i\,\mathfrak{s}\,(u_1, u_2)$ in u analytisch, folgt nach *Cauchy Riemann*

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{r}_2 = -\,\mathfrak{s}_1,\ \Delta\,\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{r}_{22} = 0,\ \Delta\,\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{11} + \mathfrak{s}_{22} = 0$$

und da $\mathfrak{y}$ isotrop

$$\mathfrak{y}'^2 = (\mathfrak{r}_1 + i\,\mathfrak{s}_1)^2 = (\mathfrak{r}_1 - i\,\mathfrak{r}_2)^2 = (i\,\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2)^2 = 0.$$

Daher ist

$$\mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{r}_2^2 = \lambda,\ \mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2 = 0 \text{ bzw. } g_{11} = g_{22} = \lambda\,(u_1, u_2) \neq 0,\ g_{12} = 0.$$

Die Indizes der Vektoren bedeuten partielle Ableitungen, z. B.:

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{\partial\,\mathfrak{r}}{\partial\,u_1},\ \mathfrak{r}_2 = \frac{\partial\,\mathfrak{r}}{\partial\,u_2},\ \mathfrak{r}_{11} = \frac{\partial^2\,\mathfrak{r}}{\partial\,u_1^2},\ \mathfrak{r}_{12} = \frac{\partial^2\,\mathfrak{r}}{\partial\,u_1\,\partial\,u_2},\ \mathfrak{r}_{22} = \frac{\partial^2\,\mathfrak{r}}{\partial\,u_2^2},\ \mathfrak{s}_1 = \frac{\partial\,\mathfrak{s}}{\partial\,u_1},\ \mathfrak{s}_2 = \frac{\partial\,\mathfrak{s}}{\partial\,u_2},\ldots$$

$$\mu = e_{11} = e_{22},\ e_{12} = 0,\ |g_{ik}| = \lambda^2,\ |e_{ik}| = \mu^2$$

und daher:

$$\int\int K\,|g_{ik}|^{1/2}\,du_1\,du_2 = \int\int \lambda K\,du_1\,du_2 = \int\int \mu\,du_1\,du_2,$$
$$\int\int (\lambda K - \mu)\,du_1\,du_2 = 0.$$

Im Falle konstanter negativer *Gaußscher* Krümmung $K = -k^2$ ergibt sich

$$\int\int (\lambda k^2 + \mu)\,du_1\,du_2 = 0. \tag{3}$$

Da $\mathfrak{x}$ eine reelle Fläche darstellt, gilt:

$$\lambda = g_{11} = g_{22} = \mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2 > 0,\ \mu = e_{11} = e_{22} = \mathfrak{n}_1^2 = \mathfrak{n}_2^2 > 0.$$

Auch die Zahl k ist reell und ihr Quadrat daher positiv. Dann ist jedoch die Gleichung (3) unmöglich. Damit haben wir den bekannten Sachverhalt bestätigt:

(I) *Im euklidischen dreidimensionalen Raum gibt es keine Minimalflächen mit konstanter negativer Gaußscher Krümmung.*

§ 2. $n = 4$.

Der Wert des Ergebnisses (I) liegt für uns allein in der Methode des Beweises. Im Gegensatz zu anderen Beweisen dieses Resultates (I) kann die in § 1 verwendete Methode auch noch für die Minimalflächen des R_4 verwendet werden. $\mathfrak{y}(u)$ bezeichne nunmehr den Ortsvektor einer allgemeinen isotropen Kurve des R_4. Dann sind u_1, u_2 wiederum isotherme Parameter auf der reellen Minimalfläche

$$\Re\,\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{x}(u_1, u_2),\ g_{11} = g_{22} = \lambda,\ g_{12} = 0,\ (\Delta\,\mathfrak{x} = 0)$$

des R_4. Auf $\mathfrak{x}$ verwenden wir das begleitende normierte und orthogonalisierte Vierbein:

$$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3;\ \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ & i, k = 0, 1, 2, 3, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

dessen Vektoren $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ aus dem Ortsvektor der Minimalfläche explizit berechnet werden können:

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\,\mathfrak{h}_{12},\ \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\mathfrak{h}_{11} = -\frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\mathfrak{h}_{22},$$
$$\lambda = \mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2,\ \nu = \mathfrak{h}_{11}^2 = \mathfrak{h}_{22}^2,\ \varrho = \mathfrak{h}_{12}^2. \tag{4}$$

Dabei sind die Vektoren $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ die kovarianten Ableitungen

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\} \mathfrak{x}_\gamma,\quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$$

des Ortsvektors $\mathfrak{r}$. Sie liegen alle in der Normalebene der Fläche; $\mathfrak{h}_{11}$ und $\mathfrak{h}_{22}$ sind linear abhängig, da der mittlere Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ der Fläche nach Voraussetzung verschwindet:

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta}\,\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 1/\lambda\,(\mathfrak{h}_{11} + \mathfrak{h}_{22}) = 0,\ \mathfrak{h}_{11} = -\,\mathfrak{h}_{22},\ \mathfrak{h}_{11}^2 = \mathfrak{h}_{22}^2 = \nu^2.$$

Ist *u Study-Vessiot*scher Parameter auf $\mathfrak{h}$ (u), so folgt überdies $\mathfrak{h}_{11}\,\mathfrak{h}_{12} = -\mathfrak{h}_{22}\,\mathfrak{h}_{12} = 0$. Dann sind alle Vektoren (4) normiert und orthogonalisiert. Ist dies nicht der Fall, so sind $\mathfrak{h}_{11} = -\mathfrak{h}_{22}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ durch geeignete Linearkombinationen zu ersetzen. Für die Vektoren des begleitenden Vierbeins (4) gelten *E. Cartans* Ableitungsgleichungen:

$$d\mathfrak{a}_i = \sum_{k=0}^{3} \mathfrak{a}_k\,\tau_{ik},\ \tau_{ik} + \tau_{ki} = 0,\quad i = 0, 1, 2, 3$$

und die *Pfaff*schen binären Formen $\tau_{ik} = -\mathfrak{a}_i\,d\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k\,d\mathfrak{a}_i$ lassen sich aus (4) berechnen. Wie ist nun die *Gauß*sche sphärische Abbildung der Minimalflächen des R_3 auf solche des R_4 zu verallgemeinern? Hier hat *W. Blaschke* in seiner Arbeit „Sulla geometrie differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4" den Weg gewiesen[4]. Die Komponenten a_{ik} der Vektoren (4) bilden eine orthogonale Matrix der Determinante $+1$. Mit ihrer Hilfe bilde man die konjugierten Quaternionen:

$$\boldsymbol{a}_i = a_{i0} + a_{i1}\,e_1 + a_{i2}\,e_2 + a_{i3}\,e_3,\ \bar{\boldsymbol{a}} = a_{i0} - a_{i1}\,e_1 - a_{i2}\,e_2 - a_{i3}\,e_3,$$
$$i = 0, 1, 2, 3$$

und betrachte speziell die Quaternionenprodukte

$$\boldsymbol{a}_\alpha\,\bar{\boldsymbol{a}}_0 = \boldsymbol{r}_\alpha,\ \bar{\boldsymbol{a}}_0\,\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha',\ \alpha = 1, 2, 3.$$

Ihre „Skalarteile" verschwinden wegen der Orthogonalität der Matrix $\|a_{ik}\|$. Ihre „vektoriellen Teile" lassen sich als Vektoren eines R_3 deuten. Darunter sind insbesondere die Quaternionen $\boldsymbol{r}_3$ und $\boldsymbol{r}_3'$ invariant gegenüber Drehungen der Flächentangentialebene in sich. Die r_3 und r_3' entsprechenden Vektoren $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ deutet *W. Blaschke* als Ortsvektoren eines Paars zweier Kugelbilder in R_3 der Fläche R_4. Damit wird jeder zweidimensionalen Fläche des R_4 ein Paar Kugelbilder zugeordnet. Berechnet man jetzt die *Pfaff*schen Formen $\tau_{ik} = -\mathfrak{a}_i\,d\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k\,d\mathfrak{a}_i$ aus (4) und benutzt die auf Minimalflächen in isothermen Parametern gültige Relation $\Delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{r}_{22} = 0$, so ergibt sich: *W. Blaschke*'s Kugelbilder der Minimalflächen des R_4 sind konform gleichwie die *Gauß*schen

[4] Vgl. *W. Blaschke*, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV-Tomo XXVIII — 1949, p. 205—209.

Kugelbilder der Minimalflächen des R_3[5]. Die entsprechenden binären quadratischen Differentialformen

$$\langle d\mathfrak{x}_3,\ d\mathfrak{x}_3 \rangle \quad \text{und} \quad \langle d\mathfrak{x},\ d\mathfrak{x} \rangle = \lambda\,(du_1^2 + du_2^2)$$

bzw.

$$\langle d\mathfrak{x}_3',\ d\mathfrak{x}_3' \rangle \quad \text{und} \quad \langle d\mathfrak{x},\ d\mathfrak{x} \rangle = \lambda\,(du_1^2 + du_2^2)$$

sind also proportional. Die Werte dieser Proportionalitätsfaktoren sind für das Folgende wichtig. Man erhält[6]

$$\begin{aligned}\langle d\mathfrak{x}_3,\ d\mathfrak{x}_3 \rangle &= \chi/\lambda\,(du_1^2 + du_2^2);\ \chi = (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})^2 + \\ &\quad + (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12})^2 + 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11}) - 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12}), \qquad (5)\\ \langle d\mathfrak{x}_3',\ d\mathfrak{x}_3' \rangle &= \psi/\lambda\,(du_1^2 + du_2^2);\ \psi = (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11})^2 + (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})^2 + \\ &\quad + (\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12})^2 - 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{12})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{11}) + 2\,(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{x}_{11})\,(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{x}_{12}).\end{aligned}$$

Insbesondere heben sich also in der Summe $\chi + \psi$ alle negativen Terme weg. Bezeichnen wir jetzt die Flächenelemente der Kugelbilder mit Φ und Φ' und den Integranden der *Gauß*schen Totalkrümmung der Fläche mit Ψ, so gilt nach *W. Blaschke* allgemein:[7]

$$\int \Phi + \int \Phi' = 2 \int \Psi = 2 \int\int K \left| g_{ik} \right|^{1/2} du_1\, du_2. \qquad (6)$$

Bezeichnen wir die metrischen Fundamentalkomponenten des Kugelbildes $\mathfrak{x}_3$ mit r_{ik} und die des Kugelbildes $\mathfrak{x}_3'$ mit r_{ik}', so ergibt sich für Minimalflächen:

$$r_{11} = r_{22} = \lambda\,\sigma,\ r_{12} = r_{21} = 0,\ \left| r_{ik} \right| = \lambda^2\,\sigma^2 = \sigma^2 \left| g_{ik} \right|,\ \sigma = \chi/\lambda^2,$$

$$r_{11}' = r_{22}' = \lambda\,\sigma',\ r_{12}' = r_{21}' = 0,\ \left| r_{ik}' \right| = \lambda^2\,\sigma'^2 = \sigma'^2 \left| g_{ik} \right|,\ \sigma' = \psi/\lambda^2.$$

Da $g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2 = \lambda^2$, entsteht so an Stelle von (6) die Gleichung

$$\int\int \left| r_{ik} \right|^{1/2} du_1\, du_2 + \int\int \left| r_{ik}' \right|^{1/2} du_1\, du_2 = 2 \int\int K \left| g_{ik} \right|^{1/2} du_1\, du_2 = 2 \int\int K \lambda\, du_1 du_2$$

oder

$$\int\int \lambda\,(\sigma + \sigma' - 2\,K)\, du_1\, du_2 = 0.$$

Die letzte Gleichung verwandelt sich im Falle negativer konstanter *Gauß*scher Krümmung $K = -k^2$ in die folgende:

$$\int\int \mathfrak{x}_1^2 \left(\frac{\chi}{\mathfrak{x}_1^2} + \frac{\psi}{\mathfrak{x}_1^2} + 2\,k^2\right) du_1\, du_2 = \int\int \mathfrak{x}_2^2 \left(\frac{\chi}{\mathfrak{x}_2^2} + \frac{\psi}{\mathfrak{x}_2^2} + 2\,k^2\right) du_1\, du_2 = 0.$$

Doch dieses Resultat ist unmöglich, denn nach (5) besteht die Summe

---

[5] Vgl. *M. Pinl*, *B*-Kugelbilder der reellen Minimalflächen in R_4. Math. Z. 59, S. 290—295 (1953).

[6] Vgl. (5), S. 294.

[7] Vgl. (4), p. 208.

$\chi + \psi$ aus Quadraten reeller Zahlen und dasselbe gilt auch für die Quadrate der reellen Vektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ und auch die Zahl k ist reell und ihr Quadrat positiv. Damit gewinnen wir das Ergebnis:

(II) *Im euklidischen vierdimensionalen Raum gibt es keine Minimalflächen mit konstanter nichtverschwindender Gaußscher Krümmung.*

Auch der Fall konstanter positiver *Gauß*scher Krümmung ist unmöglich, da die *Gauß*sche Krümmung stets in der Form $K = -(a^2+b^2)$ geschrieben werden kann, worin a und b die Halbachsen der Krümmungsellipse bedeuten. Auf reellen Flächen ist dieser Ausdruck niemals positiv. Nach *D. Hilbert* gibt es im euklidischen dreidimensionalen Raum keine singularitätenfreien Flächen konstanter negativer *Gauß*scher Krümmung[8]. Dieser Satz gilt nicht mehr im *Hilbert*schen Raum, wie *L. Bieberbach* durch Angabe eines Beispiels gezeigt hat[9]. Für endliche Dimensionszahlen $n > 3$ scheint die Frage der Gültigkeit dieses *Hilbert*schen Satzes noch ungeklärt. Unser Ergebnis (II) bedeutet eine Warnungstafel für Versuche, ein solches Gegenbeispiel bereits mit Hilfe der (formelmäßig so bequemen) Minimalflächen des R_4 zu finden.

Darjeeling (Himalaya), Mai 1953.

---

[8] Vgl. z. B. *W. Blaschke*, Differentialgeometrie, Band I, Springer-Verlag, Berlin; Comment. math. helv. 4, 1932, S. 248—255.

[9] Vgl. *L. Bieberbach*, Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich (1932).

Zum Sequentialverfahren von Robbins und Monro.

Von

L. Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 1. September 1953.)

Robbins und *Monro*[1] haben folgende Fragen aufgeworfen: Es sei eine Klasse von Verteilungsfunktionen $F(y; x)$ gegeben, welche von einem Parameter x $(-\infty < x < +\infty)$ abhängen. Es existiere für alle x $E(y; x) = M(x)$. α sei eine reelle vorgegebene Zahl und es sei bekannt, daß die Gleichung $M(x) = \alpha$ genau eine Wurzel δ habe, jedoch seien sowohl $F(y; x)$ als auch $M(x)$ der Form nach unbekannt. Es soll eine Folge zufälliger Variabler x_n konstruiert werden, die stochastisch gegen δ konvergiert.

Die Verfasser zeigen, daß dies unter gewissen Voraussetzungen das folgende Sequentialschema liefert:

$$x_{n+1} - x_n = a_n(\alpha - y_n). \tag{1}$$

Hiebei wird x_1 beliebig gewählt und die zufällige Variable y_n besitzt die Verteilung $F(y_n; x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Die $a_n > 0$ sind passend gewählte Konstante.

Robbins und *Monro* zeigen sogar etwas mehr als die stochastische Konvergenz von x_n gegen δ, nämlich:

$$b_n = E[(x_n - \delta)^2] = o(1). \tag{2}$$

Voraussetzungen, welche die Gültigkeit von (2) implizieren, sind z. B.:

Es gibt ein $C > 0$, so daß

$$\int_{-C}^{C} dF(y; x) = 1, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Es ist weiter

$$M(x) - \alpha < 0 \text{ für } x - \delta < 0 \tag{4}$$

$$M(x) - \alpha > 0 \text{ für } x - \delta > 0$$

[1] *H. Robbins* und *S. Monro*, The Annals of Math. Statistics **22**, 400—407 (1951).

Überdies ist $M(x)$ in einer ε-Umgebung von δ differenzierbar und man hat dort $M'(x) > 0$.

Für $|x-\delta| \geqq \varepsilon/2$ ist $M(x)$ monoton wachsend. Außerdem muß

$$\frac{c'}{n} \leqq a_n \leqq \frac{c''}{n}, \quad c', c'' > 0 \tag{5}$$

erfüllt sein.

Wir haben an anderer Stelle[2] gezeigt, daß man unter stärkeren Bedingungen für $M(x)$ auf die Einschränkung (3) verzichten kann und dennoch vermöge (1) für die b_n die Größenordnung (2) erzielt. Darüber hinaus war noch eine genauere Aussage über das asymptotische Verhalten von b_n möglich, was auch praktisch von Bedeutung ist. Wir wollen nun darauf aufmerksam machen, daß unsere Beweismethode natürlich auch für den von *Robbins* und *Monro* betrachteten Fall mehr liefert, nämlich die explizite Angabe einer oberen Schranke für die b_n, welche die Abhängigkeit der Größenordnung der b_n von der Wahl der a_n und von $|x_1 - \delta|$ in Evidenz setzt. Wir verallgemeinern die Voraussetzungen von *Robbins* und *Monro* über das Verhalten von $M(x)$ unwesentlich und zeigen den

Satz: *Es sei $F(y; x)$ eine Klasse von Verteilungsfunktionen, welche von einem Parameter abhängen, $-\infty < x < +\infty$. Es gelte für passendes $C > 0$ identisch in x*

$$\int_{-C}^{C} dF(y; x) = 1 \tag{3}$$

und es sei $E(y; x) = M(x)$. α sei reell und die Gleichung $M(x) = \alpha$ habe eine eindeutige bestimmte Lösung δ. $F(y; x)$ und $M(x)$ seien der Form nach unbekannt. Wir geben ein x_1 beliebig vor und betrachten die Markoffsche Kette

$$x_{n+1} - x_n = a_n(\alpha - y_n). \tag{1}$$

Dabei hat y_n die Verteilungsfunktion $F(y_n; x_n)$, $n \geqq 1$. Die a_n sind >0 und es gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{6}$$

$M(x)$ erfülle die Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} M(x) - \alpha &< 0 \text{ für } x - \delta < 0 \\ M(x) - \alpha &> 0 \text{ für } x - \delta > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

---

[2] *L. Schmetterer*, Österr. Ingenieur-Archiv VII, 111—117 (1953).

In $|x-\delta|<\varepsilon>0$ *gelte für ein* $K>0$

$$|M(x)-\alpha| \geqq K|x-\delta| \tag{7}$$

und für $|x-\delta| \geqq \varepsilon$ *sei*

$$|M(x)-\alpha| \geqq B \geqq 0. \tag{8}$$

Unter diesen Voraussetzungen hat man mit der Bezeichnung $\sum_{i=1}^{n} a_i = A_n$, $n \geqq 1$, $A_0 = 1$

$$b_n \leqq (x_1-\delta)^2 \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{K_1 a_i}{A_{i-1}}\right) + \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{a_i K_1}{A_{i-1}}\right) \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 e_i \left[\prod_{r=1}^{i}\left(1-\frac{a_r K_1}{A_{r-1}}\right)\right]^{-1}. \tag{9}$$

wo K_1 *eine noch zu definierende Konstante ist,* $e_i = E[(y_i-\alpha)^2]$, $i = 1, 2, \ldots$ *Aus* (9) *folgt insbesondere, wie man auch* a_n *gemäß* (6) *wählt,* $b_n = o(1)$.

Für den Beweis ist es nötig, einiges aus der Arbeit l. c. 1) zu wiederholen. Durch Quadrieren von (1) und Bildung des Erwartungswertes erhält man (vgl. l. c. 1), p. 402, Formel (14)):

$$b_{n+1} = b_n - 2a_n E[(x_n-\delta)(M(x_n)-\alpha)] + \\ + a_n^2 e_n = b_n - 2a_n E[|x_n-\delta|\,|M(x_n)-\alpha|] + a_n^2 e_n,$$

wegen (4).

Es ist wegen (3) $W(\{|y_i| \leqq C\}) = 1$, also folgt aus (1)

$$W(\{|x_n-\delta| \leqq |x_1-\delta| + (|\alpha| + C) A_{n-1}\}) = 1.$$

Da nach (6) $A_n \to \infty$ gilt, läßt sich $A > 0$ so wählen, daß $|x_1-\delta| + (|\alpha| + C) A_{n-1} \leqq A \cdot A_{n-1}$ für $n = 1, 2, \ldots$ gilt.

Aus (7) folgt für $|x_n-\delta| < \varepsilon$

$$|M(x_n)-\alpha| \geqq K|x_n-\delta| \tag{10}$$

und aus (8) für $\varepsilon \leqq |x_n-\delta| \leqq AA_{n-1}$

$$|M(x_n)-\alpha| \geqq \frac{B}{AA_{n-1}}|x_n-\delta|. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt die Existenz einer Konstanten $K_1/2 > 0$, welche von $|x_1-\delta|$ abhängt, so daß in $0 < |x_n-\delta| \leqq A \cdot A_{n-1}$

$$|M(x_n)-\alpha| \geqq \frac{K_1}{2A_{n-1}}|x_n-\delta|$$

richtig ist. Dies führt zu

$$b_{n+1} \leqq b_n - K_1 \frac{a_n}{A_{n-1}} E[(x_n - \delta)^2] + a_n^2 e_n = b_n \left(1 - K_1 \frac{a_n}{A_{n-1}}\right) + a_n^2 e_n. \tag{12}$$

Da nach (6) $\frac{a_n}{A_{n-1}} = o(1)$, kann $1 - K_1 \frac{a_n}{A_{n-1}} > 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ angenommen werden. Wählt man also in (12) stets das Gleichheitszeichen, dann erhält man für die b_n einen möglichst großen Wert. Wenn in (12) stets das Gleichheitszeichen gilt, erhält man für die b_n eine inhomogene lineare Differenzengleichung, die leicht lösbar ist. Die Lösung ergibt die rechte Seite von (9).

Um nun $b_n = o(1)$ nachzuweisen, beachte man zunächst, daß aus (3) folgt:

$$e_i = E[(y_i - \alpha)^2] \leqq C^2 + 2C \mid \alpha \mid + \alpha^2 = C_1 \text{ (sic!)}. \tag{13}$$

Wegen (6) divergiert nach dem Satz von *Abel* auch $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{A_{i-1}}$.

Die spezielle Wahl (5) der a_n bei *Robbins* und *Monro* ist somit überflüssig.

Also divergiert $\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{a_i K_1}{A_{i-1}}\right)$ gegen 0. Nach einem bekannten Satz von *Cesaro* ist überdies $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A_{i-1}} = \log A_{n-1} + o(\log A_{n-1})$.

Weiter ist

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{a_i K_1}{A_{i-1}}\right) \sim e^{-K_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A_{i-1}}} \sim e^{-K_1 \log A_{n-1}} = A_{n-1}^{-K_1}{}^{3} \tag{14}$$

Wegen (13) und (14) ist nach (9)

$$b_n = (x_1 - \delta)^2 O(A_{n-1}^{-K_1}) + O(A_{n-1}^{-K_1}) O\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 A_{i-1}^{K_1}\right).$$

Diese Größenordnung läßt sich nicht mehr verbessern. Leichte Schlüsse führen vermöge (6) zu $b_n = o(1)$. Ohne Spezialisierung der a_n kann man aber auch nicht mehr aussagen. Aber gerade die Wahl der a_n hat man ja im Rahmen der durch (6) gegebenen Beschränkungen von vornherein in der Hand. Ohne uns auf Einzelheiten einzulassen, wollen wir

---

[3] Wir schreiben $a_n \sim b_n$, wenn $\frac{a_n}{b_n} \to c > 0$ gilt.

noch illustrieren, daß die Wahl von a_n gemäß (5) nicht das beste Ergebnis hinsichtlich der Größenordnung der b_n liefert.

Sei $a_n = 1/n$, also $A_{n-1} = \log n + o(\log n)$. Somit wird

$$b_n = O[(\log n)^{-K_1}], \text{ da } \sum_{i=1}^{n-1} i^{-2} [\log (i-1)]^{K_1}$$

konvergiert. Es sei bemerkt, daß das „O" von $|x_1 - \delta|$ abhängt.

Wählt man nun aber $a_n = 1/n^{\alpha}$,[4] $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, dann ist $A_{n-1} = O(n^{1-\alpha})$ und

$$b_n = O(n^{-K_1(1-\alpha)}) + O(n^{-K_1(1-\alpha)}) O\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^{-2\alpha + K_1(1-\alpha)}\right).$$

Ist $K_1 < \dfrac{2\alpha - 1}{1-\alpha}$, dann konvergiert $\sum_{i=1}^{n-1} i^{-2\alpha + K_1(1-\alpha)}$ und man erhält $b_n = O(n^{-K_1(1-\alpha)})$.

Ist aber $K_1 > \dfrac{2\alpha - 1}{1-\alpha}$, dann erhält man $b_n = O(n^{-K_1(1-\alpha)}) + O(n^{1-2\alpha}) = O(n^{1-2\alpha})$, da jetzt $2\alpha - 1 < K_1(1-\alpha)$. Es sei bemerkt, daß in diesem Fall das „O" für $n \to \infty$ nicht mehr von $|x_1 - \delta|$ abhängt.

Für $K_1 = \dfrac{2\alpha - 1}{1-\alpha}$ erhält man noch $b_n = O(n^{-K_1(1-\alpha)} \log n)$.

Wir können also noch das folgende Corollar notieren:

Corollar: Unter den Voraussetzungen des Satzes ist es stets möglich, die a_n gemäß (6) zu wählen, daß b_n wie irgendeine Potenz γ $(0 < \gamma < 1)$ von $1/n$ gegen 0 strebt, der Wert von γ bleibt jedoch i. a. unbekannt und hängt davon ab, wie nahe man x_1 bei der unbekannten Größe δ wählt. Kennt man eine Konstante $D > 0$, so daß $|\delta| \leqq D$ gilt — und dies wird in den Anwendungen meist der Fall sein — dann kann man erreichen, daß γ beliebig nahe an 1 heranrückt.

[4] Eine Verwechslung mit der früher definierten Größe α ist wohl ausgeschlossen.

Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum (R_4).

Von

Karl H. Wolff, Wien.

(Eingelangt am 30. September 1953.)

Einleitung.

H. Minkowski [2] hat eine Methode angegeben, um alle kritischen Gitter eines konvexen Körpers im dreidimensionalen Raum (R_3) aufstellen zu können. Es soll dies nun auch für die konvexen Körper im R_4 durchgeführt werden.

Im § 1 bestimmen wir zunächst die verschiedenen Gitteroktaeder. Dies wurde bereits von *E. Brunngraber* [1] durchgeführt. Wir führen dies nochmals mit einer anderen Methode durch.

Im § 2 bestimmen wir alle Gitter, die für einen vorgegebenen konvexen Körper höchstens in Frage kommen.

Im § 3 wenden wir die Ergebnisse des § 2 auf die Kugel des R_4 an. Wir erhalten das kritische Gitter der Kugel. Das Ergebnis wurde bereits in arithmetischer Weise (Reduktionstheorie der quadratischen Formen) und geometrischer Weise (*K. Ollerenshaw* [3]) ermittelt; aber, soweit mir bekannt ist, noch nie auf Minkowskischer Grundlage.

Vorbemerkung: Im Folgenden verstehen wir unter Vektoren die durch sie festgelegten Raumpunkte.

§ 1.

Es sei K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt. Wir werden zeigen: die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_4$ jedes kritischen Gitters lassen sich immer so einführen, daß auf dem Rand von K vier Gitterpunkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ liegen, die sich in einer der folgenden sechs Arten darstellen lassen:

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\mathfrak{p}_4 = \mathfrak{e}_1(1-\delta_{k1}-\delta_{k2}) + \mathfrak{e}_2(1-\delta_{k1}+\delta_{k6}) + \mathfrak{e}_3(1-\delta_{k1}+\delta_{k5}+\delta_{k6}) + \mathfrak{e}_4(k-1+\delta_{k1}+\delta_{k2})$$

wobei k eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 ist.

Wir gehen davon aus, daß vier linear unabhängige Gitterpunkte des kritischen Gitters auf K liegen müssen. Es seien dies die Vektoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$. Wir adaptieren das Gitter auf folgende Weise nach den $\mathfrak{p}_i$:

$$\mathfrak{e}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ki}\,\mathfrak{p}_i \quad (k = 1, 2, 3); \quad \mathfrak{e}_4 = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_{4i}\,\mathfrak{p}_i + \lambda_{44}\,\mathfrak{p}_4 \tag{1}$$

Die λ_{ki} lassen sich immer so bestimmen, daß gilt:

$$0 \leqq \lambda_{ki} < \lambda_{ii} \leqq 1 \tag{2}$$

und sich jeder Gitterpunkt ganzzahlig in den $\mathfrak{e}_i$ darstellen läßt. Die $\mathfrak{e}_i$ sind also Einheitsvektoren des Gitters.

In seiner Arbeit über den R_3 zeigt *Minkowski*, daß sich für die ersten drei $\mathfrak{e}_i$ zwei Möglichkeiten ergeben.

Fall I: $\mathfrak{e}_i = \mathfrak{p}_i \quad (i = 1, 2, 3)$

Fall II: $\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i \quad (i = 1, 2); \qquad \mathfrak{e}_3 = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{p}_i$

Beide Fälle werden getrennt behandelt.

Fall I: Es ist $\mathfrak{e}_i = \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und wir setzen

$$\mathfrak{p}_4 = \sum_{i=1}^{4} p_i\,\mathfrak{e}_i$$

Aus den Adaptionsformeln (1) folgt:

$$p_i = \frac{\lambda_{4i}}{\lambda_{44}} \quad (i = 1, 2, 3); \quad p_4 = \frac{1}{\lambda_{44}}$$

Wegen (2) gilt also: $0 \leqq p_i < p_4$. $(i = 1, 2, 3)$

Es sei $F(x_1, x_2, x_3, x_4) \leqq 1$ die Gleichung des Körpers K in Gitterkoordinaten. Da die $\mathfrak{p}_i$ am Rande liegen, muß gelten:

$$F(1, 0, 0, 0) = F(0, 1, 0, 0) = F(0, 0, 1, 0) = F(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1$$

Hilfssatz 1: Es sind nur solche $\mathfrak{p}_4$ möglich, für die das Oktaeder P:

$$\sum_{i=1}^{4} \left| x_i - \frac{p_i + \delta_{i4}}{p_4}\, x_4 \right| \leqq 1$$

gitterpunktfrei ist.

Beweis: Da K als konvex vorausgesetzt wurde, so gilt:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \leqq F(x_1 - \frac{p_1}{p_4} x_4, 0, 0, 0) + F(0, x_2 - \frac{p_2}{p_4} x_4, 0, 0) +$$

$$+ F(0, 0, x_3 - \frac{p_3}{p_4} x_4, 0) + F(\frac{p_1}{p_4} x_4, \frac{p_2}{p_4} x_4, \frac{p_3}{p_4} x_4, \frac{p_4}{p_4} x_4) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left| x_i - \frac{p_i + \delta_{i4}}{p_4} x_4 \right|$$

Aus $$\sum_{i=1}^{4} \left| x_i - \frac{p_i + \delta_{i4}}{p_4} x_4 \right| < 1$$

folgt $$F(x_1, x_2, x_3, x_4) < 1$$

Liegt also ein Gitterpunkt in P, so auch in K. Da nun das Gitter notwendig K-zulässig ist, so muß P notwendig gitterpunktfrei sein.

Hilfssatz 2: Es genügt, die Fälle mit

$$0 \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq p_3 \leqq \frac{p_4}{2}$$

zu betrachten.

Beweis: Wir setzen $p_i = g_i p_4 + \varepsilon_i p_i$ $(i = 1, 2, 3)$; $\bar{p}_4 = p_4$ mit g_i ganz und $\varepsilon_i = \pm 1$. Durch passende Wahl von g_i und ε_i können wir erreichen, daß gilt:

$$0 \leqq \bar{p}_i \leqq \frac{\bar{p}_4}{2}$$

Auch die $\bar{p}_i$ sind linear unabhängig und liegen auf dem Rande von K. Anstatt von den $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{e}_i$ können wir auch von den $\bar{\mathfrak{p}}_i$ und $\bar{\mathfrak{e}}_i$ ausgehen. Wir können also

$$0 \leqq p_i \leqq \frac{p_4}{2}$$

voraussetzen. Da auch die Reihenfolge der ersten drei $\mathfrak{e}_i$ beliebig war, so genügt es, die Fälle mit

$$0 \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq p_3 \leqq \frac{p_4}{2}$$

zu betrachten.

Hilfssatz 3: Ist $p_4 \geqq 3$, so genügt es, die Fälle mit

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_4$$

zu betrachten.

Beweis: Ist $\sum_{i=1}^{3} p_i \leqq p_4 - 1$, so gilt:

$$F(0,0,0,1) \leqq \frac{p_1}{p_4} + \frac{p_2}{p_4} + \frac{p_3}{p_4} + \frac{1}{p_4} \leqq \frac{p_4 - 1}{p_4} + \frac{1}{p_4} = 1$$

Dies ist ein Widerspruch zu Hilfssatz 1.

Ist $\sum_{i=1}^{3} p_i \geqq p_4 + 1$, so gilt:

$$F(1,1,1,2) \leqq 3 - 2\frac{p_1}{p_4} - 2\frac{p_2}{p_4} - 2\frac{p_3}{p_4} + \frac{2}{p_4} \leqq 1$$

ebenfalls im Widerspruch zu Hilfssatz 1.

Hilfssatz 4: Ist $p_4 > 5$, so ist P nicht gitterpunktfrei.

Beweis: Wäre $p_3 < \frac{p_4}{3}$, so müßte $p_1 + p_2 + p_3 \leqq 3\,p_3 < p_4$ sein, im Widerspruch zu Hilfssatz 3. Es gilt also:

$$p_3 \geqq \frac{p_4}{3}$$

Nun kann man leicht zeigen, daß $p_2 + p_3 < \frac{p_4}{2} + p_1 + 1$ sein muß, da sonst $(0, 1, 1, 2)$ in P liegen würde. Daraus folgt:

$$2\,p_1 + 2\,(p_2 + p_3) < 2\,p_1 + p_4 + 2\,p_1 + 2$$

und wegen Hilfssatz 3

$$2\,p_4 \leqq p_4 + 4\,p_1 + 1$$

und daraus

$$p_1 \geqq \frac{p_4 - 1}{4} \tag{3}$$

Nun betrachtet man die beiden Fälle:

a) $$p_2 \leqq \frac{p_4}{3}$$

Unter Verwendung von (3) zeigt man, daß entweder $(1, 1, 1, 3)$ oder $(1, 1, 2, 4)$ in P liegen.

b) $$p_2 > \frac{p_4}{3}$$

Unter Verwendung von (3) zeigt man, daß $(1, 1, 1, 3)$ in P liegt.

Durch die Hilfssätze 1 bis 4 haben wir die möglichen $\mathfrak{p}_4$ so weit eingeschränkt, daß wir sie einzeln bestimmen können.

1. $p_4 = 1$; Wegen Hilfssatz 2 ist nur der Fall $p_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ möglich. Das Oktaeder P:

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| \leqq 1$$

ist gitterpunktfrei. Daher ist (0, 0, 0, 1) ein möglicher $\mathfrak{p}_4$.

2. $p_4 = 2$; $\alpha)$ $p_1 = p_2 = 0$. Das Oktaeder P:

$$|x_1| + |x_2| + \left|x_3 - \frac{p_3 x_4}{2}\right| + \left|\frac{x_4}{2}\right| \leqq 1$$

enthält den Gitterpunkt (0, 0, 0, 1), im Widerspruch zu Hilfssatz 1.

$\beta)$ $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = 1$. Das Oktaeder P:

$$|x_1| + \left|x_2 - \frac{x_4}{2}\right| + \left|x_3 - \frac{x_4}{2}\right| + \left|\frac{x_4}{2}\right| \leqq 1$$

ist gitterpunktfrei. (0, 1, 1, 2) ist ein möglicher $\mathfrak{p}_4$.

$\gamma)$ $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Das Oktaeder P ist gitterpunktfrei. (1, 1, 1, 2) ist ein möglicher $\mathfrak{p}_4$.

Analog gehen wir für $p_4 = 3, 4, 5$ vor, immer unter Berücksichtigung der Hilfssätze. Für die $\mathfrak{p}_4$ im Fall I ergeben sich genau die folgenden Möglichkeiten:

$\mathfrak{p}_4$=(0, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 2); (1, 1, 1, 2); (1, 1, 1, 3); (1, 1, 2, 4); (1, 2, 2, 5).

Fall II: Es ist $\mathfrak{e}_i = \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2)$; $-\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2 + 2\mathfrak{e}_3 = \mathfrak{p}_3$ und wir setzen wieder

$$\mathfrak{p}_4 = \sum_{i=1}^{4} p_i \mathfrak{e}_i.$$

Aus den Adaptionsformeln (1) folgt:

$$\mathfrak{p}_4 = \frac{1}{\lambda_{44}}[\lambda_{41}\mathfrak{e}_1 + \lambda_{42}\mathfrak{e}_2 + \lambda_{43}(-\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2 + 2\mathfrak{e}_3) + \mathfrak{e}_4] =$$

$$= \frac{\lambda_{41} - \lambda_{43}}{\lambda_{44}}\mathfrak{e}_1 + \frac{\lambda_{42} - \lambda_{43}}{\lambda_{44}}\mathfrak{e}_2 + 2\frac{\lambda_{43}}{\lambda_{44}}\mathfrak{e}_3 + \frac{1}{\lambda_{44}}\mathfrak{e}_4$$

Daraus folgt:

$$p_1 = p_4(\lambda_{41} - \lambda_{43}),\ p_2 = p_4(\lambda_{42} - \lambda_{43}),\ p_3 = 2p_4\lambda_{43},\ p_4 = \frac{1}{\lambda_{44}}.$$

Wegen (2) gilt also:

$$-\frac{p_4}{2}<p_1<p_4, \quad -\frac{p_4}{2}<p_2<p_4, \quad 0\leqq p_3<p_4. \tag{4}$$

Wir wollen die Reihenfolge der e_i so wählen, daß gilt:

$$p_1 \leqq p_2$$

Hilfssatz 5: Es sind nur solche p_4 möglich, für die das Oktaeder P:

$$\left|x_1+\frac{x_3}{2}-\frac{p_3+2p_1}{2p_4}x_4\right|+\left|x_2+\frac{x_3}{2}-\frac{p_3+2p_2}{2p_4}x_4\right|+$$
$$+\left|\frac{x_3p_4-x_4p_3}{2p_4}\right|+\left|\frac{x_4}{p_4}\right|\leqq 1$$

gitterpunktfrei ist.

Beweis: Da K konvex vorausgesetzt wurde, so gilt:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)\leqq F\left(x_1+\frac{x_3}{2}-\frac{p_3+2p_1}{2p_4}x_4,0,0,0\right)+$$
$$+F\left(0,x_2+\frac{x_3}{2}-\frac{p_3+2p_2}{2p_4}x_4,0,0\right)+$$
$$+F\left(\frac{-x_3}{2}+\frac{p_3x_4}{2p_4},\frac{-x_3}{2}+\frac{p_3x_4}{2p_4},x_3-\frac{p_3x_4}{p_4},0\right)+F\left(\frac{p_1x_4}{p_4},\frac{p_2x_4}{p_4},\frac{p_3x_4}{p_4},x_4\right)=$$
$$=\left|x_1+\frac{x_3}{2}-\frac{p_3+2p_1}{2p_4}x_4\right|+\left|x_2+\frac{x_3}{2}-\frac{p_3+2p_2}{2p_4}x_4\right|+$$
$$+\left|\frac{x_3p_4-x_4p_3}{2p_4}\right|+\frac{x_4}{p_4}|.$$

Der Beweis wird wie in Hilfssatz 1 weitergeführt.

Hilfssatz 6: Ist $p_4\geqq 3$, so ist P nicht gitterpunktfrei.

Beweis: Es sei $p_4=3$. Daraus folgt:

$$0\leqq p_3<3$$

$\alpha)$ $p_3=0$. Bei passender Wahl von x_1 und x_2 kann man immer erreichen, daß $F(x_1,x_2,0,1)\leqq 1$ wird. P enthält also auch den Gitterpunkt $(x_1,x_2,0,1)$.

$\beta)$ $p_3=1$. Ist ein $p_i\equiv 1\ (3)$, so liegt $(x_1,x_2,1,1)$ in P.
Ist kein $p_i\equiv 1\ (3)$, so liegt $(x_1,x_2,0,1)$ in P.

$\gamma)$ $p_3=2$. Ist ein $p_i\equiv 2\ (3)$, so liegt $(x_1,x_2,0,1)$ in P.
Ist kein $p_i\equiv 2\ (3)$, so liegt $(x_1,x_2,1,1)$ in P.

Analog zeigt man für $4 \leqq p_4 \leqq 12$, daß P nicht gitterpunktfrei ist. Für $p_4 > 12$ betrachtet man das Volumen des Okteaders P:

$$V = \frac{2^4}{4!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \cdot p_4$$

Für $p_4 > 12$ ist $V > 16 = 2^4$. Nach *Minkowski* liegt immer ein weiterer Gitterpunkt in P.

Durch die Hilfssätze 5 und 6 haben wir die möglichen p_4 so weit eingeschränkt, daß wir sie einzeln bestimmen können.

1. $p_4 = 1$; Wegen (4) ist nur der Fall $p_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ möglich. Man sieht leicht, daß das Oktaeder P gitterpunktfrei ist. Daher ist $(0, 0, 0, 1)$ ein möglicher $\mathfrak{p}_4$.
2. $p_4 = 2$; $\alpha)$ $p_1 = p_3 = 0$. Es liegt $(0, 0, 0, 1)$ in P.
   $\beta)$ $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 0$. Es liegt $(0, 0, 1, 1)$ in P.
   $\gamma)$ $p_3 = 1$. P ist gitterpunktfrei für alle p_1 und p_2.

Aus (4) und Hilfssatz 6 ersieht man, daß keine weiteren Fälle zu betrachten sind.

Für die $\mathfrak{p}_4$ im Fall II ergeben sich genau die folgenden Möglichkeiten: $\mathfrak{p}_4 = (0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 2)$.

Hilfssatz 7: Alle Fälle aus II lassen sich auf Fälle aus I zurückführen.

Beweis für den Fall $\mathfrak{p}_4 = (0, 0, 1, 2)$: Wir führen neue Einheitsvektoren ein:

$$\bar{\mathfrak{e}}_1 = -\mathfrak{e}_1,\ \bar{\mathfrak{e}}_2 = -\mathfrak{e}_2,\ \bar{\mathfrak{e}}_3 = \mathfrak{e}_3 + 2\,\mathfrak{e}_4,\ \bar{\mathfrak{e}}_4 = -\mathfrak{e}_4.$$

Es gilt jetzt:

$\mathfrak{p}_1 = (1, 0, 0, 0)_{\mathfrak{e}}$ (in den $\mathfrak{e}_i$-Koordinaten) $= \mathfrak{e}_1 = -\bar{\mathfrak{e}}_1 =$
$= -(1, 0, 0, 0)_{\bar{\mathfrak{e}}}$ (in den $\bar{\mathfrak{e}}_i$-Koordinaten) $= -\bar{\mathfrak{p}}_1$

$\mathfrak{p}_2 = (0, 1, 0, 0)_{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}_2 = -\bar{\mathfrak{e}}_2 = -(0, 1, 0, 0)_{\bar{\mathfrak{e}}} = -\bar{\mathfrak{p}}_2$

$\mathfrak{p}_3 = (-1, -1, 2, 0)_{\mathfrak{e}} = -\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2 + 2\,\mathfrak{e}_3 = \bar{\mathfrak{e}}_1 + \bar{\mathfrak{e}}_2 + 2\,\bar{\mathfrak{e}}_3 + 4\,\bar{\mathfrak{e}}_4 = (1, 1, 2, 4)_{\bar{\mathfrak{e}}} = \bar{\mathfrak{p}}_4$

$\mathfrak{p}_4 = (0, 0, 1, 2)_{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}_3 + 2\,\mathfrak{e}_4 = \bar{\mathfrak{e}}_3 = (0, 0, 1, 0)_{\bar{\mathfrak{e}}} = \bar{\mathfrak{p}}_3$.

Die Determinante der Transformation ist -1 und es gehen vier linear unabhängige Gitterpunkte wieder in vier linear unabhängige über. Das Gitter geht also in sich selbst über. Die $\bar{\mathfrak{p}}_i$ liegen nach Konstruktion auf K und sind in den $\bar{\mathfrak{e}}_i$-Koordinaten von der Gestalt Fall I, $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 2, 4)$.

Analog kann man durch passende Wahl einer Transformation den Beweis für jeden der übrigen drei Fälle führen.

§ 2.

Es sei K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt und es liegen vier linear unabhängige Gitterpunkte $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf K. Nach § 1 kann man voraussetzen, daß $\mathfrak{p}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathfrak{p}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathfrak{p}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathfrak{p}_4 = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ist. Für $\mathfrak{p}_4$ ergeben sich sechs Möglichkeiten.

Der Körper K sei gegeben durch die Ungleichung

$$F(\mathfrak{q}) = F(q_1, q_2, q_3, q_4) \leqq 1.$$

Da das Gitter K-zulässig sein soll, muß für jeden Gitterpunkt $\mathfrak{r}$ gelten:

$$F(\mathfrak{r}) = F(r_1, r_2, r_3, r_4) \geqq 1.$$

Diese Ungleichung müßte also für jeden einzelnen Gitterpunkt nachgeprüft werden. Wir werden aber zeigen, daß es genügt, die Ungleichung bei einer endlichen Anzahl von Gitterpunkten nachzuprüfen. Ist sie für diese Gitterpunkte erfüllt, dann auch für alle übrigen, und der Körper K ist somit gitterpunktfrei. Wir geben diese endlich vielen Gitterpunkte auch für jeden einzelnen der sechs Fälle des § 1 an.

Hauptsatz: K ist dann und nur dann gitterpunktfrei, wenn

$$F(\mathfrak{r}) \geqq 1$$

für die folgenden $\mathfrak{r}$ gilt:

1. $\mathfrak{p}_4 = (0,0,0,1)$. $\mathfrak{r} = (\pm r_i, \pm r_j, \pm r_k, r_l)$ mit $(i,j,k,l) = (1,2,3,4)$, wobei (r_1, r_2, r_3, r_4) die folgenden Gitterpunkte durchläuft: (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 3), (1, 1, 2, 4), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 2, 5), (1, 2, 3, 5), (2, 3, 4, 5).

2. $\mathfrak{p}_4 = (0, 1, 1, 2)$. $\mathfrak{r} = (r_1, r_j, r_k, r_4)$ mit $(j, k) = (2, 3)$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ beliebig, wobei (r_1, r_2, r_3, r_4) die folgenden Gitterpunkte durchläuft: (1, ε_2, 0, 0), (1, ε_2, ε_3, 0), (1, ε_2, 2 ε_3, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 0, ε_3, 1), (1, 0, 2 ε_3, 1), (1, 0, 3, 1), (1, 1, ε_3, 1), (1, 1, 2 ε_3, 1), (1, 1, 3, 1), (2, 0, 0, 1), (2, 0, ε_3, 1), (2, 0, 2, 1), (2, 1, ε_3, 1), (2, 1, 2, 1), (2, —2, —1, 1), (2, —1, 3, 1), (2, —2, 2, 1), (2, 2, 3, 1), (1, 0, 1, 2), (1, ε_2, 1, 2), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 3, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 3), (2, ε_2, 1, 3), (2, ε_2, 2, 3), (2, 2, 2, 3), (2, 1, 4, 3), (2, 2, 4, 3), (1, 1, 2, 4,), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 2, 5), (1, 2, 3, 5), (1, 3, 3, 5), (2, 1, 2, 5), (2, 1, 3, 5), (2, 2, 4, 5), (2, 3, 4, 5.)

3. $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 1, 2)$. $\mathfrak{r} = (r_i, r_j, r_k, r_4)$ mit $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ beliebig, wobei (r_1, r_2, r_3, r_4) die folgenden Gitterpunkte durchläuft: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0, 0)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2\,\varepsilon_3, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(\varepsilon_1, 0, 0, 1)$, $(\varepsilon_1, 0, 1, 1)$, $(\varepsilon_1, 1, 1, 1)$, $(2, 0, 0, 1)$, $(2, 0, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(2, -2, 0, 1)$, $(2, -2, 1, 1)$, $(-2, -1, 0, 1)$, $(-2, -1, 1, 1)$, $(3, -1, 0, 1)$, $(3, 0, 2, 1)$, $(3, -1, 1, 1)$, $(3, 1, 2, 1)$, $(\varepsilon_1, 0, 1, 2)$, $(\varepsilon_1, 1, 2, 2)$, $(0, 1, 3, 2)$, $(1, 2, 3, 2)$, $(\varepsilon_1, 1, 1, 3)$, $(\varepsilon_1, 1, 2, 3)$, $(\varepsilon_1, 2, 2, 3)$, $(2, 2, 2, 3)$, $(1, 1, 4, 3)$, $(1, 2, 4, 3)$, $(2, 2, 4, 3)$, $(1, 1, 2, 4)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 3, 4)$, $(1, 2, 2, 5)$, $(1, 2, 3, 5)$, $(1, 3, 3, 5)$, $(2, 2, 4, 5)$, $(2, 3, 4, 5)$, $(3, 3, 4, 5)$.

4. $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 1, 3)$. $\mathfrak{r} = (r_i, r_j, r_k, r_4)$ mit $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ beliebig, wobei (r_1, r_2, r_3, r_4) die folgenden Gitterpunkte durchläuft: $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(0, \varepsilon_2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 1)$, $(-1, 1, 2, 1)$, $(0, 1, 1, 2)$, $(\varepsilon_1, 1, 1, 2)$, $(\varepsilon_1, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 2, 3)$, $(1, 1, 2, 4)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 2, 5)$, $(1, 2, 3, 5)$.

5. $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 2, 4)$. $\mathfrak{r} = (r_i, r_j, r_3, r_4)$ mit $(i, j) = (1, 2)$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ beliebig, wobei (r_1, r_2, r_3, r_4) die folgenden Gitterpunkte durchläuft: $(-1, 1, \varepsilon_3, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, -1, 0, 1)$, $(1, -1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 2, 1, 3)$, $(1, 1, 2, 3)$, $(1, 2, 2, 3)$, $(1, 2, 1, 4)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 2, 5)$, $(1, 2, 3, 5)$.

6. $\mathfrak{p}_4 = (1, 2, 2, 5)$. $\mathfrak{r} = (r_1, r_j, r_k, r_4)$ mit $(j, k) = (2, 3)$ wobei (r_1, r_2, r_3, r_4) die folgenden Gitterpunkte durchläuft: $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 1, 2, 3)$, $(1, 1, 2, 4)$, $(2, 1, 3, 5)$.

Der Beweis wird so geführt werden, daß für jeden einzelnen der sechs Fälle die im Hauptsatz angegebenen Gitterpunkte bestimmt werden.

Definitiou: Mit $M_1(\mathfrak{r})$ bezeichnen wir das Oktaeder mit dem Mittelpunkt 0 und den Eckpunkten $\pm \mathfrak{p}_2$, $\pm \mathfrak{p}_3$, $\pm \mathfrak{p}_4$, $\pm \mathfrak{r}$. Analog seien die Oktaeder $M_2(\mathfrak{r})$, $M_3(\mathfrak{r})$ und $M_4(\mathfrak{r})$ definiert.

Hilfssatz 8: Wird $F(\mathfrak{r}) \geqq 1$ für alle jene Gitterpunkte $\mathfrak{r}$ vorausgesetzt, für die alle vier Oktaeder $M_1(\mathfrak{r})$, $M_2(\mathfrak{r})$, $M_3(\mathfrak{r})$ und $M_4(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei sind, so ist K gitterpunktfrei.

Beweis: Da K konvex ist, mit $\pm \mathfrak{p}_1$, $\pm \mathfrak{p}_2$, $\pm \mathfrak{p}_3$ und $\pm \mathfrak{p}_4$ am Rande, so sieht man leicht, daß mit $\mathfrak{r}$ auch $M_i(\mathfrak{r})$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, in K liegt. Liegt also ein Gitterpunkt $\bar{\mathfrak{r}}$ in einem dieser Oktaeder, so folgt aus $\mathfrak{r} \in K$ auch $\bar{\mathfrak{r}} \in K$. Daher folgt umgekehrt aus $\bar{\mathfrak{r}} \in | K$ auch $\mathfrak{r} \in | K$. Also folgt $F(\mathfrak{r}) \geqq 1$ schon aus $F(\bar{\mathfrak{r}}) \geqq 1$ und muß nicht eigens vorausgesetzt werden.

Definition: Liegt ein Oktaeder vor, mit dem Mittelpunkt 0 und den Eckpunkten $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4})$, $i = (1, 2, 3, 4)$, so bezeichnen wir mit Det (Okt) den absoluten Betrag der folgenden Determinante:

$$\text{Det (Okt)} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{vmatrix}$$

Hilfssatz 9: Es genügt $F(\mathfrak{r}) \geqq 1$ für jene $\mathfrak{r}$ vorauszusetzen, für die für alle vier Oktaeder $M_i(\mathfrak{r})$ gilt:

$$\text{Det (Okt)} \leqq 5$$

Beweis: Nach Hilfssatz 8 müssen nur solche $\mathfrak{r}$ betrachtet werden, für die alle vier Oktaeder $M_i(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei sind. Diese Oktaeder sind konvexe Körper mit dem Mittelpunkt 0 und vier linear unabhängigen Gitterpunkten q_i am Rande. Die Einheitsvektoren des Gitters lassen sich nach § 1 stets so einführen, daß $q_1 = (1,0,0,0)$, $q_2 = (0,1,0,0)$, $q_3 = (0, 0, 1, 0)$ und $q_4 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ wird und, da die $M_i(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei sein sollen, ist $0 \leqq q_4 \leqq 5$. Det (Okt) ist invariant in Bezug auf die Transformation der Einheitsvektoren, da diese nur die Determinante ± 1 haben kann. Es gilt daher Det (Okt) $= q_4 \leqq 5$.

Wir bestimmen jetzt die im Hauptsatz für den Fall 1 ($\mathfrak{p}_4 = (0,0,0,1)$) angegebenen Gitterpunkte. Nach Hilfssatz 8 sind nur solche $\mathfrak{r}$ zu betrachten, für die alle vier Oktaeder $M_i(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei sind. Wir bezeichnen die Menge der Gitterpunkte $\mathfrak{r}$, für die $M_i(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei ist mit M_i. Zunächst bestimmen wir M_4. Die Ungleichung des Oktaeders $M_4(\mathfrak{r})$ lautet:

$$\left| x_1 - \frac{r_1}{r_4} x_4 \right| + \left| x_2 - \frac{r_2}{r_4} x_4 \right| + \left| x_3 - \frac{r_3}{r_4} x_4 \right| + \left| \frac{x_4}{r_4} \right| \leqq 1$$

Jene Gitterpunkte $\mathfrak{r}$, für die dieses Oktaeder gitterpunktfrei ist, haben wir bereits teilweise im § 1 bestimmt, doch konnten wir dort, da uns die Wahl der Einheitsvektoren noch freistand, die Einschränkung des Hilfssatzes 2 voraussetzen. Damals wurde $\bar{p}_i = g_i p_4 + \varepsilon_i p_i$, $i = (1, 2, 3)$, $\bar{p}_4 = p_4$ gesetzt und die Reihenfolge der e_i festgelegt. Wenn wir jetzt zu jedem im § 1 bestimmten Gitterpunkt (r_1, r_2, r_3, r_4) alle Gitterpunkte

$$(\pm r_i + g_i r_4, \quad \pm r_j + g_j r_4, \quad \pm r_k + g_k r_4, \quad \pm r_4) \text{ mit } (i, j, k) = (1, 2, 3)$$

betrachten, dann haben wir offenbar die Einschränkungen des Hilfssatzes 2 rückgängig gemacht. Somit besteht die Menge M_4 aus den Gitterpunkten

$(\pm r_i + g_i r_4,\ \pm r_j + g_j r_4,\ \pm r_k + g_k r_4,\ \pm r_4)$ mit $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ und g_i ganz, wobei (r_1, r_2, r_3, r_4) die folgenden Gitterpunkte durchläuft: (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 4), (1, 2, 2, 5).

Um die Menge M_3 zu erhalten, betrachten wir das Oktaeder $M_3(\mathfrak{r})$.

$$\left| x_1 - \frac{r_1}{r_3} x_3 \right| + \left| x_2 - \frac{r_2}{r_3} x_3 \right| + \left| \frac{x_3}{r_3} \right| + \left| x_4 - \frac{r_4}{r_3} x_3 \right| \leqq 1$$

Durch Vertauschen der Indices 3 und 4 erhalten wir das Oktaeder $M_4(\mathfrak{r})$. Daher erhält man die Menge M_3 aus der Menge M_4 durch Vertauschen der dritten und vierten Koordinaten der Gitterpunkte. In analoger Weise ermittelt man M_1 und M_2.

Jene Gitterpunkte $\mathfrak{r}$, für die alle vier $M_i(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei sind, bilden den Durchschnitt D der Mengen M_i. Da für alle $\mathfrak{r}$ aus M_i gilt: $|r_i| \leqq 5$, lassen sich die Gitterpunkte aus D in endlich vielen Schritten bestimmen. Wegen der Mittelpunktseigenschaft:

$$F(\mathfrak{r}) = F(-\mathfrak{r})$$

genügt es dabei, nur die Punkte mit $r_4 \geqq 0$ zu betrachten. Führt man dies durch, so ergeben sich genau die im Hauptsatz für diesen Fall angegebenen Gitterpunkte.

Zur Bestimmung der im Hauptsatz für den Fall 2 angegebenen Gitterpunkte gehen wir analog vor. Die Menge M_4 besteht aus denselben Gitterpunkten wie im Fall 1. Die Ungleichung des Oktaeders $M_3(\mathfrak{r})$ lautet:

$$\left| x_1 - \frac{2 r_1}{2 r_3 - r_4} \left(x_3 - \frac{x_4}{2}\right) \right| + \left| x_2 - \frac{2 r_2 - r_4}{2 r_3 - r_4} \left(x_3 - \frac{x_4}{2}\right) - \frac{x_4}{2} \right| + \\ + \left| \frac{2 x_3 - x_4}{2 r_3 - r_4} \right| + \left| \frac{x_3 r_4 - x_4 r_3}{2 r_3 - r_4} \right| \leqq 1$$

und man erhält:

$$\mathrm{Det}\,(\mathrm{Okt}) = |2 r_3 - r_4|$$

Aus Hilfssatz 9 folgt:

$$|2 r_3 - r_4| \leqq 5 \tag{5}$$

Unsere Aufgabe ist es, den Durchschnitt D zu bestimmen. Es genügt also, wenn wir nur solche Gitterpunkte betrachten, die im Durchschnitt von M_3 und M_4 liegen. Für diese gilt aber:

$$|r_4| \leqq 5 \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt die Abschätzung für r_3:

$$|r_3| \leqq 5 \qquad (7)$$

Jene Gitterpunkte aus M_3, die noch zu betrachten sind, bestimmen wir jetzt einzeln:

1. $r_3 = 0$; a) $r_4 = 0$. Es existiert kein Oktaeder $M_3(\mathfrak{r})$.

   b) $r_4 = 1$. Man sieht leicht, daß das Oktaeder $M_3(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei ist.

   c) $r_4 = 2$. Da $\mathfrak{r}$ auch in M_4 liegen muß, so gilt $r_1 \equiv r_2 \equiv 1\ (2)$. Unter dieser Voraussetzung ist $M_3(\mathfrak{r})$ gitterpunktfrei.

   d) $r_4 = 3$. Es liegt $\mathfrak{r}$ nicht mehr in M_4.

2. $r_3 = 1$; a) $r_4 = 0$; α) $r_1 \equiv 0\ (2)$, $r_2 \equiv 1\ (2)$. Bei passender Wahl von x_1 und x_2 erreicht man, daß $(x_1, x_2, 0, 1)$ in $M_3(\mathfrak{r})$ liegt.

   β) $r_1 \equiv 1\ (2)$ oder $r_2 \equiv 0\ (2)$. $M_3(\mathfrak{r})$ ist gitterpunktfrei.

   b) $r_4 = 1$. $M_3(\mathfrak{r})$ ist gitterpunktfrei.

Auf diese Weise können die Gitterpunkte bestimmt werden und zwar, wegen (6) und (7), in endlich vielen Schritten. Es ergeben sich die folgenden Gitterpunkte: $(r_1, r_2, 0, 0)$, $(r_1, r_2, 0, 1)$, $(r_1, r_2, 0, 2)$ mit $r_1 \equiv r_2 \equiv 1\ (2)$, $(r_1, r_2, 1, 0)$ mit $r_1 \equiv 1\ (2)$ oder $r_2 \equiv 0\ (2)$, $(r_1, r_2, 1, 1)$, $(r_1, r_2, 1, 2)$, $(r_1, r_2, 1, 3)$, $(r_1, r_2, 1, 4)$ mit $r_1 \equiv 1\ (2)$ oder $r_2 \equiv 0\ (2)$, $(r_1, r_2, 1, 5)$ mit $r_1 \not\equiv 0\ (3)$ und $r_2 \not\equiv 1\ (3)$, $(r_1, r_2, 2, 0)$ mit $r_1 \equiv r_2 \equiv 1\ (2)$, $(r_1, r_2, 2, 1)$ mit $r_1 \not\equiv 0\ (3)$ und $r_2 \not\equiv 2\ (3)$, $(r_1, r_2, 2, 2)$ mit $r_1 \equiv r_2 \equiv 1\ (2)$, $(r_1, r_2, 2, 3)$, $(r_1, r_2, 2, 4)$, $(r_1, r_2, 2, 5)$, $(r_1, r_2, 3, 1)$ mit $r_1 \equiv 2, 3\ (5)$ und $r_2 \equiv 2, 4\ (5)$ oder $r_1 \equiv 1, 4\ (5)$ und $r_2 \equiv 0, 1\ (5)$, $(r_1, r_2, 3, 2)$ mit $r_1 \equiv 1\ (2)$ und $r_2 \equiv 1\ (4)$ $(r_1 r_2,, 3, 4)$, $(r_1, r_2, 3, 5)$, $(r_1, r_2, 4, 3)$ mit $r_1 \equiv 2, 3\ (5)$ und $r_2 \equiv 1, 2\ (5)$, $(r_1, r_2, 4, 5)$ mit $r_1 \not\equiv 0\ (3)$ und $r_2 \not\equiv 1\ (3)$, $(r_1, r_2, -1, 0)$ mit $r_1 \equiv 1\ (2)$ oder $r_2 \equiv 0\ (2)$, $(r_1, r_2, -1, 1)$ mit $r_1 \not\equiv 0\ (3)$ und $r_2 \not\equiv 2\ (3)$, $(r_1, r_2, -1, 2)$ mit $r_1 \equiv 1\ (2)$ und $r_2 \equiv 1\ (4)$ oder $r_1 \equiv 2\ (4)$ und $r_2 \equiv 0\ (2)$, $(r_1, r_2, -1, 3)$ mit $r_1 \equiv 2, 3\ (5)$ und $r_2 \equiv 1, 2\ (5)$, $(r_1, r_2, -2, 0)$ mit $r_1 \equiv r_2 \equiv 1\ (2)$, $(r_1, r_2, -2, 1)$ mit $r_1 \equiv 2, 3\ (5)$ und $r_2 \equiv 2, 4\ (5)$ oder $r_1 \equiv 1, 4\ (5)$ und $r_2 \equiv 0, 1\ (5)$.

Die Gitterpunkte aus M_2 erhält man aus den eben angeführten durch Vertauschen der Indices 2 und 3.

Für die aus M_1 noch zu betrachtenden Gitterpunkte ergeben sich die folgenden: $(0, r_2, r_3, r_4)$, $(\pm 1, r_2, r_3, r_4)$, $(\pm 2, r_2, r_3, 1)$, $(\pm 2\, r_2, r_3, 3)$, $(\pm 2, r_2, r_3, 5)$.

Man sieht leicht, daß sich die Gitterpunkte des Durchschnittes D, wie in Fall 1, in endlich vielen Schritten bestimmen lassen. Es ergeben sich genau die im Hauptsatz für diesen Fall angegebenen Gitterpunkte.

Die Fälle 3, 4, 5 und 6 des Hauptsatzes werden analog behandelt.

§ 3.

Wir wenden den Hauptsatz auf die Kugel an. Wir werden zeigen: Das kritische Gitter der Kugel hat die Determinante $\frac{1}{2}$.

Die Ungleichung der Kugel K lautet:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \leqq 1$$

Es liegen vier linear unabhängige Gitterpunkte $\mathfrak{p}_i$ des kritischen Gitters auf K. Diese führen wir als Einheitsvektoren eines neuen Koordinatensystems ein. Die Ungleichung der Kugel lautet in den neuen Koordinaten:

$$\sum_{i,k=1}^{4} y_i y_k \bar{g}_{ik} \leqq 1$$

Es müssen die Gitterpunkte $\mathfrak{p}_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ am Rande liegen, daher gilt:

$$\bar{g}_{ii} = 1$$

Die Ungleichung der Kugel lautet also schließlich:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + g_{12} y_1 y_2 + g_{13} y_1 y_3 + \\ + g_{14} y_1 y_4 + g_{23} y_2 y_3 + g_{24} y_2 y_4 + g_{34} y_3 y_4 \leqq 1$$

Hilfssatz 10: Man kann $|g_{ik}| \leqq 1$ voraussetzen.

Beweis: Es sei z. B. $g_{12} > 1$. Es gilt:

$$F(-1, 1, 0, 0) = 2 - g_{12} \geqq 1.$$

Daraus folgt:

$$g_{12} \leqq 1.$$

Dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung $g_{12} > 1$.

Hilfssatz 11: Das kritische Gitter kann nicht von der Gestalt $\mathfrak{p}_4 = (1, 2, 2, 5)$ sein.

Beweis indirekt: Es sei $\mathfrak{p}_4 = (1, 2, 2, 5)$. Für das kritische Gitter muß gelten:

$$F(\mathfrak{e}_4) = F\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \text{ (in den } \mathfrak{p}_i\text{-Koordinaten)} \geqq 1$$

$$\frac{10}{25} + \frac{1}{25}(2g_{12} + 2g_{13} + 4g_{23} - g_{14} - 2g_{24} - 2g_{34}) \geqq 1$$

$$2g_{12} + 2g_{13} + 4g_{23} - g_{14} - 2g_{24} - 2g_{34} \geqq 15$$

$$13 \text{ . Maximum } |g_{ik}| \geqq 15.$$

Nach Hilfssatz 10 ist 13 . Maximum $|g_{ik}| \leqq 13$. Wir erhalten also einen Widerspruch.

In gleicher Weise kann man zeigen, daß das kritische Gitter nicht von der Gestalt $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 2, 4)$; $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 1, 3)$ oder $\mathfrak{p}_4 = (0, 1, 1, 2)$ sein kann.

Hilfssatz 12: Ist das Gitter von der Gestalt $\mathfrak{p}_4 = (0, 0, 0, 1)$ und lassen sich die Einheitsvektoren des Gitters nicht so einführen, daß ein Gitter der Gestalt $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 1, 2)$ entsteht, so ist die Determinante des Gitters $d(\Gamma) > \frac{1}{2}$.

Beweis: Für das kritische Gitter muß gelten:

(I) $F(\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2) \geqq 1$, $F(\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_3) \geqq 1$, $F(\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_4) \geqq 1$,
$F(\mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3) \geqq 1$, $F(\mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_4) \geqq 1$, $F(\mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4) \geqq 1$.

(II) $F(\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3) \geqq 1$, $F(\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_4) \geqq 1$,
$F(\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4) \geqq 1$, $F(\mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4) \geqq 1$.

(III) $F(\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4) \geqq 1$.

Für alle weiteren Gitterpunkte $\mathfrak{r}$ muß $F(\mathfrak{r}) > 1$ sein, da sonst ein Gitter zweiter bis sechster Art vorliegen würde. Die Gitterdeterminante ist dann bestimmt, wenn die sechs Konstanten g_{ik} bestimmt sind. Dies wird durch sechs Bedingungsgleichungen erreicht. Wir können also sechs weitere Gitterpunkte auf dem Rande der Kugel voraussetzen. (Im Grunde handelt es sich hier um eine Extremalaufgabe. Werden aber weniger als sechs weitere Gitterpunkte am Rande der Kugel angenommen und wird die minimale Determinante gesucht, so ergibt sich für diese der Wert 0.)

Wir betrachten jetzt die verschiedenen Möglichkeiten, die sich für die sechs Gitterpunkte ergeben.

I. Es liege ein Gitterpunkt aus (III) auf der Kugel K. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß (1, 1, 1, 1) auf K liegt.

Hilfssatz 13: Es können nur noch Gitterpunkte auf K liegen, für die alle e_i gleiches Vorzeichen haben.

Beweis indirekt: Wir nehmen an, es liege der Gitterpunkt $a\,e_1 + b\,e_2 - e_3 + e_4$ auf K. Die vier Gitterpunkte $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(a, b, -1, 1)$ liegen alle auf K und haben die Determinante 2. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung des Hilfssatzes 12.

a) Es liegen $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ und $(1, 0, 1, 1)$ auf K.
Die vier Gitterpunkte $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$ haben die Determinante 2, im Widerspruch zur Voraussetzung des Hilfssatzes 12.

b) Es liegen nur $(1, 1, 1, 0)$ und $(1, 1, 0, 1)$ aus (II) auf K. Es gilt:

$$\begin{aligned} g_{12} + g_{13} + g_{23} &= -2 \\ g_{12} + g_{14} + g_{24} &= -2 \end{aligned} \tag{8}$$

Es müssen noch drei Gitterpunkte aus (I) auf K liegen. Liegt z. B. $(1, 1, 0, 0)$ auf K, so gilt:

$$F(1, 1, 0, 0) = 2 + g_{12} = 1$$

Daraus folgt:

$$g_{12} = -1$$

Es sind also drei der g_{ik} gleich minus eins. Aus (8) folgt:

$$2\,g_{12} + g_{13} + g_{14} + g_{23} + g_{24} = -4$$

und da $(1, 1, 1, 1)$ auf K liegt, gilt:

$$g_{12} + g_{13} + g_{14} + g_{23} + g_{24} + g_{34} = -3$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$g_{12} - g_{34} = -1$$

Da $|g_{ik}| \leqq 1$ ist, so folgt:

$$g_{12} \leqq 0 \text{ und } g_{34} \geqq 0$$

A) $g_{12} = 0$, $g_{34} = 1$.

$$F(0, 0, -1, 1) = 2 - 1 = 1$$

Es liegt also $(0, 0, -1, 1)$ auf K, im Widerspruch zu Hilfssatz 13.

B) $g_{12} < 0$. Aus (8) folgt, daß nicht zugleich

$$g_{13} = g_{23} = -1 \text{ oder}$$

$$g_{14} = g_{24} = -1$$

sein kann. Es sind aber drei der g_{ik} gleich minus eins. Folglich gilt:

$$g_{12} = -1,\ g_{34} = 0\,.$$

Es müssen noch zwei der g_{ik} gleich minus eins sein. Es ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

α) $g_{13} = g_{14} = -1$, $g_{23} = g_{24} = 0$. Es liegt $(2, 1, 1, 1)$ auf K, im Widerspruch zur Voraussetzung des Hilfssatzes 12.

β) $g_{23} = g_{24} = -1$, $g_{13} = g_{14} = 0$. Es liegt $(1, 2, 1, 1)$ auf K, im Widerspruch zur Voraussetzung des Hilfssatzes 12.

γ) $g_{13} = g_{24} = -1$, $g_{23} = g_{14} = 0$. In diesem Fall lautet die Ungleichung der Kugel:

$$Q = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 - y_2 y_4 = 1$$

Die Diskriminante der Form Q sei $\Delta(Q)$. Es gilt:

$$\Delta(Q) = d(\Gamma)^2 = \frac{1}{2^4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{2^4}$$

Daraus folgt: $d(\Gamma) = \dfrac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{2}$.

δ) $g_{23} = g_{14} = -1$, $g_{13} = g_{24} = 0$. Wir erhalten dasselbe Resultat wie in γ.

c) Es liegt nur $(1, 1, 1, 0)$ aus (II) auf K. Es müssen vier Gitterpunkte aus (I) auf K liegen. Es muß also für vier der g_{ik} gelten:

$$g_{ik} = -1$$

Da $(1, 1, 1, 1)$ und $(1, 1, 1, 0)$ am Rande von K liegen, so gilt:

$$g_{12} + g_{13} + g_{14} + g_{23} + g_{24} + g_{34} = -3 \tag{9}$$

$$g_{12} + g_{13} + g_{23} = -2 \tag{10}$$

Es sind vier der g_{ik} gleich minus eins und aus (9) folgt, daß die Summe der restlichen zwei g_{ik} gleich plus eins ist. Wegen Hilfssatz 13 muß $g_{ik} < 1$ sein. Daher müssen die restlichen zwei $g_{ik} > 0$ sein. Die Gleichung (10) kann also nicht erfüllt sein. Wir erhalten einen Widerspruch.

d) Es liegt kein Gitterpunkt aus (II) auf K. Es müssen also fünf Gitterpunkte aus (I) auf K liegen, d. h. es sind fünf der g_{ik} gleich minus eins. Daraus folgt:

$$\Sigma g_{ik} < -4.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (9).

II. Es liegt kein Gitterpunkt aus (I) auf K. Wie in I errechnet man die Determinante jedes Gitters mit $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Jetzt ist nur noch der Fall $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 1, 2)$ zu betrachten. Da wir die $\mathfrak{p}_i$ als Einheitsvektoren des neuen Koordinatensystems eingeführt haben, treten jetzt auch Gitterpunkte mit nicht ganzzahligen Koordinaten auf. So gilt z. B.

$$\mathfrak{e}_4 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

Aus

$$F(-\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2 - \mathfrak{e}_4) = F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

und

$$F(-\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_4) = F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

folgt

$$g_{12} - g_{13} + g_{14} + g_{23} - g_{24} - g_{34} \geqq 0$$

und

$$-g_{12} + g_{13} + g_{14} - g_{23} - g_{24} + g_{34} \geqq 0$$

und daraus

$$g_{14} \geqq g_{23}$$

Aus

$$F(-\mathfrak{e}_2 - \mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_4) = F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

und

$$F(\mathfrak{e}_4) = F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

folgt

$$-g_{12} - g_{13} - g_{14} + g_{23} + g_{24} + g_{34} \geqq 0$$

und

$$g_{12} + g_{13} - g_{14} + g_{23} - g_{24} - g_{34} \geqq 0$$

und daraus

$$g_{14} \leqq g_{23}$$

Es gilt also:

$$g_{14} = g_{23} \tag{11}$$

In analoger Weise erhält man

$$g_{12} = g_{34} \quad \text{und} \quad g_{13} = g_{24} \tag{12}$$

Aus

$$F(\mathfrak{e}_3 + \mathfrak{e}_4) = F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

und

$$F(\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_4) = F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

folgt

$$g_{12} - g_{13} - g_{14} - g_{23} - g_{24} + g_{34} \geqq 0$$

und

$$-g_{12} + g_{13} - g_{14} - g_{23} + g_{24} - g_{34} \geqq 0$$

und daraus

$$g_{14} + g_{23} \leqq 0 \tag{13}$$

In analoger Weise erhält man

$$g_{12} + g_{34} \leqq 0 \quad \text{und} \quad g_{13} + g_{24} \leqq 0 \tag{14}$$

Aus

$$F(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 + \mathfrak{e}_4) = F(1/2, 1/2, 1/2, 1/2) \geqq 1$$

folgt

$$g_{12} + g_{13} + g_{14} + g_{23} + g_{24} + g_{34} \geqq 0 \tag{15}$$

Aus (11) — (15) folgt:

$$g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24} = g_{34} = 0$$

Die Ungleichung der Kugel in den $\mathfrak{p}_i$-Koordinaten lautet also:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \leqq 1$$

Führen wir jetzt die Einheitsvektoren des Gitters als Einheitsvektoren des Koordinatensystems ein und sind z_1, z_2, z_3 und z_4 die neuen Koordinaten, so gilt:

$$y_i = z_i - \frac{z_4}{2}, \ (i = 1, 2, 3), \ y_4 = \frac{z_4}{2}$$

Die Ungleichung der Kugel lautet als:o

$$Q = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - z_1 z_4 - z_2 z_4 - z_3 z_4 \leqq 1$$

$$\Delta(Q) = d(\Gamma)^2 = \frac{1}{2^4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

Daraus folgt:

$$d(\Gamma) = 1/2$$

Alle andern Fälle führen entweder auf einen Widerspruch oder zu einer Gitterdeterminante $d(\Gamma) = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Der Fall $\mathfrak{p}_4 = (1, 1, 1, 2)$ liefert mit $d(\Gamma) = 1/2$ die minimale Determinante. Daraus folgt:

Das kritische Gitter der Kugel des vierdimensionalen Raumes hat die Determinante $1/2$.

Literatur.

[1] *Erna Brunngraber*: Über Punktgitter. Dissertation, Wien (1944).

[2] *H. Minkowski*: Diophantische Approximationen, 97—104 (1907).

[3] *K. Ollerenshaw:* The critical lattices of a hypersphere. J. London math. soc. **24**, 190—200 (1949), **26**, 316—318 (1951).

Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

(Eingelangt am 28. Oktober 1953)

1.

Unter den *D-Linien* einer Fläche versteht man bekanntlich jene ∞^2 auf der Fläche verlaufenden Kurven, deren Schmiegkugeln die Fläche berühren. Sie wurden erstmalig von *G. Darboux* betrachtet, der insbesondere auch dem Spezialfall einer *Grundfläche 2. Ordnung* seine Aufmerksamkeit schenkte[1]. Wie ich gezeigt habe, erfreuen sich die *D*-Kurven der Flächen 2. Ordnung zahlreicher besonderer Eigenschaften[2]; sie lassen sich unter anderem als *affine Böschungslinien* kennzeichnen, da ihre Tangenten jeweils zu den Erzeugenden eines gewissen *Richtkegels 2. Ordnung* parallel sind, der im übrigen zur Grundfläche *konzyklisch* liegt, d. h. mit dieser die Kreisschnittebenen gemeinsam hat.

Die genannte Tangenteneigenschaft bleibt natürlich auch für die *D*-Linien der *Kegel 2. Grades* aufrecht und reicht zu ihrer Festlegung vollkommen aus. In der vorliegenden Note soll nun auf eine recht merkwürdige und nur diesen speziellen Kurven zukommende metrische Eigenschaft hingewiesen werden, auf die ich im Rahmen einer größeren Untersuchung über „Doppelloxodromen" (im Sinne von *G. Scheffers*[3]) gestoßen bin, deren eigentlichen geometrischen Kern aufzudecken mir

---

[1] *G. Darboux*: Des courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. C. R. 73 (1871), 732—736.

[2] *W. Wunderlich*: Eine kennzeichnende Eigenschaft der *D*-Linien von Quadriken. Mh. Math. 55 (1951), 76—81. — Sur les lignes *D* des quadriques. Atti IV Congr. Unione Mat. Ital. (Taormina 1951), 465—468. — Euklidische und nichteuklidische *D*-Linien auf Quadriken. Ann. di mat. 33 (1952), 145—164.

[3] *G. Scheffers*: Besondere transzendente Kurven. Enz. Math. Wiss. III D 4, Nr. 34, insb. S. 252.

aber noch nicht gelungen ist: Ich werde zeigen, daß *jede D-Kurve eines Kegels 2. Grades die sechs Brennebenenbüschel des Kegels unter konstanten Winkeln durchsetzt*, daß sie mithin eine *sechsfache Loxodrome* darstellt.

2.

Setzen wir — unter Verwendung kartesischer Normalkoordinaten x, y, z — den *Grundkegel 2. Grades* an durch

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0, \tag{1}$$

oder, mit Benützung eines Parameterwinkels ω, durch

$$x:y:z=a\cos\omega:b\sin\omega:1, \quad \text{wobei} \quad a\geqq b>0. \tag{2}$$

Setzen wir noch abkürzend

$$a^2+1=A^2, \quad b^2+1=B^2, \quad a^2-b^2=A^2-B^2=C^2, \tag{3}$$

so werden die sechs *Fokalachsen* festgelegt durch[4]

$$x:y:z=\begin{cases} 0 & :C:\pm iA, \\ C & :0:\pm B, \\ \pm iA & :B:0. \end{cases} \tag{4}$$

Bedienen wir uns ferner der kürzeren und übersichtlicheren Schreibweise zuliebe des *Matrizenkalküls*, indem wir den Erzeugendenvektor (2) durch die Spaltenmatrix $\mathfrak{x}$ $(a\cos\omega, b\sin\omega, 1)$ repräsentieren; bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$ die Diagonalmatrix mit den nichtverschwindenden Elementen a^{-2}, b^{-2}, -1 und deuten wir die Stürzung einer Matrix durch eine Tilde an, dann gilt zufolge (1)

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}=0. \tag{5}$$

Führen wir ferner die durch die Spaltenmatrix $\mathfrak{y}$ $(-aB^2\sin\omega, bA^2\cos\omega, C^2\sin\omega\cos\omega)$ dargestellte „Quertangente" des Kegels ein, die zur Erzeugenden $\mathfrak{x}$ normal ist, also den Beziehungen

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y}=0, \quad \tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{y}=0 \tag{6}$$

genügt, dann können wir jede Kegeltangente als Linearkombination

$$\mathfrak{z}=\lambda\mathfrak{x}+\mathfrak{y} \tag{7}$$

ansetzen.

---

[4] Die Kegelnormale $b\cos\omega : a\sin\omega : -ab$ wird nämlich isotrop für $b^2\cos^2\omega+a^2\sin^2\omega+a^2b^2=0$, also für $\cos\omega=\mp aB/C$ und $\sin\omega=\pm ibA/C$. Die zugehörigen (isotropen) Tangentialebenen $\pm Bx\pm iAy-Cz=0$ schneiden aus den Hauptebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ die angeführten Brennstrahlen aus.

Sollen nun für eine *D-Kurve* die Tangenten voraussetzungsgemäß zu den Erzeugenden eines *konzyklischen Richtkegels* parallel sein (Abschn. 1), so muß

$$\tilde{\mathfrak{z}}\,(\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{z} = 0 \tag{8}$$

gelten, wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix und μ eine beliebige Konstante ist. Ausgeführt ergibt sich für λ die (rein-) quadratische Gleichung

$$-\lambda^2 .\,\mu\,\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} + 2\,\lambda\,(\underbrace{\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{A}\,\mathfrak{y} - \mu\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{y}}_{0}) + \tilde{\mathfrak{y}}\,(\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{y} = 0. \tag{9}$$

Zur Berechnung des *Schnittwinkels* σ der Tangente $\mathfrak{z}$ mit der Brennebene, die die Erzeugende $\mathfrak{x}$ mit einer Fokalachse verbindet — etwa mit der reellen Achse $x : y : z = C : 0 : B$ —, benötigen wir die Normale dieser Ebene. Dieselbe wird durch die Spaltenmatrix $\mathfrak{n}$ ($-bB\sin\omega$, $aB\cos\omega - C$, $bC\sin\omega$) repräsentiert und es ist natürlich

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{n} = 0. \tag{10}$$

Wir finden zunächst

$$\sin^2\sigma = \frac{(\tilde{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{n})^2}{(\tilde{\mathfrak{z}}\mathfrak{z})\,(\tilde{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n})} = \frac{(\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{n})^2}{(\lambda^2\,\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{x} + \tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y})\,(\tilde{\mathfrak{n}}\mathfrak{n})} = \frac{\mu\,(\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{n})^2}{(\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y})\,(\tilde{\mathfrak{n}}\mathfrak{n})}. \tag{11}$$

Gehörige Auswertung (unter Berücksichtigung von $a^2B^2 - b^2A^2 = A^2 - B^2 = C^2$) führt dann über

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{n} &= abB^3\sin^2\omega + abA^2B\cos^2\omega - bA^2C\cos\omega + bC^3\sin^2 w\cos\omega \\
&= b\,(aB - C\cos\omega)\,(B^2 + C^2\cos^2\omega), \\
\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y} &= A^4\cos^2\omega + B^4\sin^2\omega - C^4\sin^2\omega\cos^2\omega = (B^2 + C^2\cos^2\omega)^2, \\
\tilde{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{n} &= b^2A^2\sin^2\omega + a^2B^2\cos^2\omega - 2\,aBC\cos\omega + C^2 = (aB - C\cos\omega)^2
\end{aligned}$$

schließlich — wie behauptet, *unabhängig von* ω — auf

$$\sin\sigma_{\mathrm{II}} = b\sqrt{\mu}. \tag{12}$$

Analog ergibt sich für die übrigen Fokalachsenpaare

$$\sin\sigma_{\mathrm{I}} = a\sqrt{\mu}, \quad \sin\sigma_{\mathrm{III}} = i\sqrt{\mu}. \tag{12'}$$

Damit ist nun bewiesen der

Satz: *Die D-Linien eines Kegels 2. Grades* $z^2 = (x/a)^2 + (y/b)^2$ *sind sechsfache Loxodromen, da sie die sechs Brennebenenbüschel unter konstanten Winkeln* $\pm\sigma_{\mathrm{I}}$, $\pm\sigma_{\mathrm{II}}$, $\pm\sigma_{\mathrm{III}}$ *durchsetzen; es gilt dabei* $\sin\sigma_{\mathrm{I}} : \sin\sigma_{\mathrm{II}} : \sin\sigma_{\mathrm{III}} = a : b : i$.

3.

Der Vollständigkeit halber sei noch kurz auf die *analytische Darstellung* dieser interessanten Kurven eingegangen. Wir führen zu diesem Zwecke den vom Kegelscheitel (Ursprung) aus gezählten Radialabstand r ein und erhalten zunächst, indem wir den Schnittwinkel τ unserer D-Linie mit der Erzeugenden auf zwei Arten ausdrücken,

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{|\mathfrak{y}|}{\lambda\,|\mathfrak{x}|} = \frac{r\,d\,\theta}{d\,r}. \tag{13}$$

Für das auftretende Mantelwinkelelement $d\theta$ gilt wiederum, wenn man die Fortschreitrichtung $d\mathfrak{x}$ gemäß (7) durch

$$d\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,d\alpha + \mathfrak{y}\,d\beta \quad \text{mit} \quad d\beta = \frac{\tilde{\mathfrak{y}}\,d\,\mathfrak{x}}{\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y}} \tag{14}$$

ansetzt,

$$d\,\theta = \frac{|\mathfrak{y}|\,d\beta}{|\mathfrak{x}|}. \tag{15}$$

Aus (13) und (15) folgt nun

$$\frac{dr}{r} = \lambda\,d\beta, \tag{16}$$

wobei auf Grund von (9)

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{\mathfrak{y}}\,(\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{y}}{\mu\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}} =$$

$$\frac{B^4\,(\mu^{-1} - a^2)\sin^2\omega + A^4\,(\mu^{-1} - b^2)\cos^2\omega - C^4\,(\mu^{-1}+1)\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 1}$$

$$= A^2\,(\mu^{-1} - b^2) - C^2\,(\mu^{-1} + 1)\sin^2\omega, \tag{17}$$

ferner gemäß (14)

$$d\beta = \frac{\tilde{\mathfrak{y}}\,d\,\mathfrak{x}}{\tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{y}} = \frac{(a^2B^2\sin^2\omega + b^2A^2\cos^2\omega)\,d\omega}{a^2B^4\sin^2\omega + b^2A^4\cos^2\omega + C^4\sin^2\omega\cos^2\omega} = \frac{d\omega}{A^2 - C^2\sin^2\omega}. \tag{18}$$

Integration von (16) liefert nunmehr für $\ln r$ ein elliptisches Integral, und wir haben

$$r = c.\exp\int \frac{\sqrt{A^2\,(\mu^{-1} - b^2) - C^2\,(\mu^{-1} + 1)\sin^2\omega}}{A^2 - C^2\sin^2\omega}\,d\omega. \tag{19}$$

Damit ergeben sich anschließend die Koordinaten des laufenden Kurvenpunktes zu

$$x = r \cdot \frac{a \cos \omega}{W}, \quad y = r \cdot \frac{b \sin \omega}{W}, \quad z = r \cdot \frac{1}{W} \tag{20}$$

mit $W^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega + 1 = A^2 - C^2 \sin^2\omega$.

In gestaltlicher Hinsicht sind *drei reelle Typen* der D-Linien auf einem Kegel 2. Grades zu unterscheiden. Für $0 < \mu < 1/a^2$ wird der Grundkegel von dem konzentrisch angebrachten Tangentenrichtkegel umschlossen, so daß die zugehörigen Kurven den Charakter von *„konischen Spiralen"* aufweisen, die sich der Kegelspitze asymptotisch nähern. Im Grenzfall $\mu = 1/a^2$ zerfällt der Richtkegel in zwei Strahlbüschel und als D-Linien des Kegels stellen sich dessen (reelle) *Kreise* ein; deren Loxodromeneigenschaft bezüglich der Fokalachsen hat *E. Müller* hervorgehoben[5]. Für $1/a^2 < \mu < 1/b^2$ treten wieder *transzendente Kurven von periodischem Aufbau* auf, die jetzt aber auf zwei durch $\lambda = 0$ gekennzeichneten Erzeugenden abwechselnd mit Spitzen aufsetzen. — Für $\mu < 0$ und $\mu > 1/b^2$ schließlich fallen die Richtkegel nullteilig aus und die zugehörigen Flächenkurven sind infolgendessen *imaginär*.

4.

Auf verschiedene *Sonder- und Grenzfälle*, die durch Veränderung des Grundkegels gewonnen werden können, sei nur kurz hingewiesen:

Für $a = b$ ($C = 0$) tritt als Grundfläche ein *Drehkegel* auf, dessen D-Linien die wohlbekannten *zylindro-konischen Loxodromen* sind, die sich als Bahnkurven räumlicher Ähnlichkeitsgruppen auffassen lassen. Da hier vier Fokalachsen in der Drehachse zusammengerückt sind, liegen eigentlich nur mehr drei Brennebenenbüschel vor; als echte Böschungslinien durchsetzen diese Kurven aber auch noch das uneigentliche Ebenenbüschel $z = \text{const}$ unter festem Winkel, so daß sie als *vierfache Loxodromen* anzusehen sind.

Für $b = 0$ ($C = a$) plattet sich der Grundkegel zur xz-Ebene ab und man gelangt zu den *ebenen Loxodromen*, welche, nach Ausschaltung des trivialen II. Fokalachsenpaares, im allgemeinen gleichfalls als *vierfache Loxodromen* bezeichnet werden können. Diesen seinerzeit schon von *L. Eckhart* näher betrachteten Kurven ist eine eigene, demnächst erscheinende kleine Abhandlung gewidmet[6].

[5] *E. Müller*: Kreise als Loxodromen. Arch. Math. Phys. 26 (1918), 73—96.

[6] *L. Eckhart*: Über ebene Loxodromen und deren graphische Integration. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 127 (1918), 585—597.

W. Wunderlich: Über die ebenen Loxodromen. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien (im Druck).

Geht man schließlich durch einen Grenzübergang von den betrachteten Kegelflächen zu *Zylindern 2. Grades* über, so reduziert sich die Anzahl der eigentlichen Fokalachsen bei elliptischen und hyperbolischen Zylindern auf vier, so daß deren D-Kurven gleichfalls *vierfache Loxodromen* darstellen. Im Falle des Drehzylinders und des parabolischen Zylinders tritt eine weitere Reduktion ein; die zugehörigen D-Linien sind *Böschungsloxodromen*, da sie ein eigentliches und ein uneigentliches Ebenenbüschel isogonal durchsetzen.

Buchbesprechungen.

Truth and Consequence in Mediaeval Logic. Von *E. A. Moody.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VIII, 113 S. Amsterdam: North-Holland, Publishing Company. 1953. hfl. 12.—.

Das Buch beschäftigt sich mit der formalen Logik des späteren Mittelalters, berücksichtigt also vor allen Dingen die Logiker des 13. und 14. Jahrhunderts: *Petrus Hispanus, Peter Abélard, Wilhelm Occam, Buridan, Albertus de Saxonia* (der übrigens Rektor in Wien war) u. a. Es ist im wesentlichen ein Verdienst der neuesten Zeit, erkannt zu haben, daß es im Mittelalter eine Wiederaufnahme und Fortführung der antiken Studien zur formalen Logik gab. Wie *Lukasiewicz* festgestellt hat, lebte die Aussagenlogik der Stoa insbesondere in der mittelalterlichen Lehre von den Konsequenzen fort. Der zweite Pfeiler, um den sich die mittelalterliche formale Logik dreht, ist die Theorie der Supposition. In moderner Auffassung handelt es sich hier um den semantischen Wahrheitsbegriff und in der Theorie der Konsequenzen um die Theorie der Implikation und insbesondere um die Schlußformeln. Hier wird es unternommen, die mittelalterliche Logik im Umkreis dieser beiden tragenden Ideen in moderner Symbolik und systematisch darzustellen. Damit ist die Reihe der verdienstvollen Studien zur Geschichte der formalen Logik in dieser Sammlung (*Bochenski-Dürr*) um eine weitere bereichert worden. *L. Schmetterer*, Wien

Elemente der Algebra. Von *W. L. Ferrar.* Mit 24 Textabb., 220 S. München: R. Oldenbourg. 1953. DM 14.18.

Das Buch stellt eine Übersetzung aus dem Englischen dar. Die Originalausgabe lautet: „Higher Algebra for Schools". Es vermittelt einen Übergang von der Algebra, wie sie in den Schulen betrieben wird, zur Algebra in den Universitätsvorlesungen. Die Darstellung ist dementsprechend breit und leicht verständlich. An Hand zahlreicher Beispiele wird der Stoff erarbeitet. Ich gebe den Inhalt in Schlagworten an: Polynome und ihre Nullstellen, Permutationen und Kombinationen, rationale Funktionen und ihre geometrische Darstellung, Partialbruchzerlegung, Reihen, ins. die binomische Reihe, Exponentialfunktion und Logarithmus, 2, 3 und 4 zeilige Determinanten, Systeme von linearen Gleichungen mit 2 und 3 Unbekannten. Davon wird vieles nur an Beispielen erörtert. Ich halte es nicht für zweckmäßig, Binomialkoeffizienten mit ${}_nC_r$ zu bezeichnen. Man bleibe doch bei $\binom{n}{r}$. — Das Buch eignet sich besonders für die Hochschüler in den ersten Semestern und für die Nichtmathematiker, die Algebra brauchen. *N. Hofreiter*, Wien

Ideal Theory. Von *D. G. Northcott.* („Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics". Herausgegeben von W. V. D. Hodge: Nr. 42.) VIII, 111 S. Cambridge: At the University Press. 1953. 12 s. 6 d. net.

Man unterscheidet zwischen einer multiplikativen und einer additiven Idealtheorie. Die erstere ist die von *Dedekind* geschaffene Theorie. Sie spielt

in der algebraischen Zahlentheorie eine grundlegende Rolle. Die additive Idealtheorie hingegen ist aus dem Studium der Polynomringe hervorgegangen und ist für die algebraische Geometrie von besonderer Bedeutung. Man verdankt *Emmy Noether* den Aufbau der additiven Idealtheorie in abstrakter Darstellung. Ich erinnere etwa an ihre grundlegende Arbeit: „Idealtheorie in Ringbereichen" aus dem Jahre 1921. Seither sind zahlreiche weitere Arbeiten erschienen. Insb. stammen — um nur einige Namen zu nennen — von *Grell, Krull, v. d. Waerden* und in neuester Zeit von *Chevalley, Cohen, Zariski* wertvolle Beiträge. Dieses Buch handelt nur von der additiven Idealtheorie. Es gibt dem Leser eine gute Einführung in diesen interessanten, aber abstrakten und daher nicht leichten Zweig der Mathematik. Selbstverständlich ist das kleine Buch nur eine Einführung und kein umfassendes Lehrbuch. Abgesehen von den grundlegenden Definitionen und Sätzen der Idealtheorie bringt das Buch wichtige Entwicklungen aus der Theorie der Noetherschen Ringe und eingehende algebraische und analytische Untersuchungen über Stellenringe. Dank einer vorzüglichen Darstellung lernt der Leser die moderne Idealtheorie in ihren Grundzügen kennen und er wird befähigt, mit geringerer Mühe und größerem Verständnis die Originalarbeiten zu lesen. *N. Hofreiter*, Wien

Simultaneous Linear Equations and the Determination of Eigenvalues. Proceedings of a symposion held August 1951 in Los Angeles, California. Herausgegeben von *L. J. Paige* und *Olga Taussky*. (Applied Mathematics Series: 29.) 126 S. Washington: National Bureau of Standards. 1953. $ 1.50.

Es ist allgemein bekannt, daß die Bewältigung vieler Probleme die Auflösung von linearen Gleichungssystemen und die Berechnung von Eigenwerten notwendig macht. Durch die elektronischen Rechenmaschinen wurde es ermöglicht, obige Aufgaben auch in besonders komplizierten Fällen durchzuführen. Dabei muß der Rechnungsgang so angeordnet werden, um mit Vorteil von den neuen Rechengeräten bewältigt werden zu können. Ein Symposium, das im August 1951 in Los Angeles gehalten wurde, gab den Teilnehmern die Gelegenheit, die in den letzten Jahren gemachten Erfahrungen über die Auflösung von linearen Gleichungssystemen und die Berechnung von Eigenwerten in Form von Vorträgen und Round-table Konferenzen gegenseitig auszutauschen. Das Buch enthält die Vorträge von *A. Brauer, P. Dwyer, G. F. Fichera, G. Forsythe, R. A. Frazer, C. E. Fröberg, W. Givens, M. Hestenes, A. Householder, A. M. Ostrowski, G. Petrie, F. Rellich, B. Rosser, J. Sherman, E. Stiefel, J. Todd, A. Weinstein* und *H. Wielandt*. Alle Aufsätze handeln von linearen Gleichungssystemen oder Eigenwertberechnungen; die meisten bringen praktische Methoden, ein Drittel bezieht sich auf die Verwendung von elektronischen Rechenmaschinen. Das Buch enthält eine sehr große Anzahl von Literaturangaben. *N. Hofreiter*, Wien

Calculus. A modern approach. Von *K. Menger*. Zweite Auflage. 304 S. Chicago: Illinois Institute of Technology. 1953. $ 4.85.

Es wird die den amerikanischen Hochschulen eigentümliche Calculus-Vorlesung dargeboten, ausgehend von den beiden Grundproblemen der Differential- und Integralrechnung: Dem Tangenten- und Flächeninhaltsproblem. Was jedoch die Darstellung vor allen anderen auszeichnet, ist eine algebraisierende Tendenz, welche zunächst rein äußerlich in der Schreibweise zum Ausdruck kommt. Diese basiert auf Überlegungen grundsätzlicher Natur. Es wird genau zwischen einer Funktion an der Stelle x und der Bezeichnung der Funktion unterschieden. Z. B. bezeichnet I die Identität, sin, cos, exp den Sinus, Cosinus und die Exponentialfunktion, x, sin x, cos x, exp x sind jedoch die Werte dieser Funktionen

an der Stelle x. Jedem Lehrer ist es bekannt, daß eine Nichtunterscheidung dieser Dinge gelegentlich zu Schwierigkeiten führt. Eine weitere Vereinheitlichung wird in der Symbolik für die Ableitung und das Integral erzielt. Bei diesem bleibt das Differential weg. (Vgl. die Schreibweise im Buch von *Thielman*. Viel früher findet man sie schon bei *Pierpont*). Die Schreibweise $f \cdot g$ für das Produkt und fg für die zusammengesetzte Funktion wird vielleicht nicht ungeteilte Zustimmung finden. Besonderes Interesse dürfte das VII. Kapitel erwecken: Anwendungen auf die physikalische Wissenschaft. In ihren Grundlagen wird die Relation zwischen mathematischer Theorie und empirischen Fakten entwickelt. Hier verdient hervorgehoben zu werden: die klare Unterscheidung zwischen dem Begriff der Variablen in den (angewandten) Wissenschaften und dem i. a. vom Mathematiker betrachteten Variablenbegriff, der hier Variable im Sinne von *Weierstraß* genannt wird. Diese Vorlesungen sind ein schöner Beweis dafür, daß man in der Mathematik jedem Stoffgebiet immer wieder neue Seiten abgewinnen kann.

L. Schmetterer, Wien

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Von *R. Rothe*. Herausgegeben von *W. Schmeidler*. Teil II: Integralrechnung. — Unendliche Reihen. — Vektorrechnung nebst Anwendungen. Neunte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 22.) Mit 98 Textabb., 212 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 6.50.

Die neunte Auflage bringt keine wesentlichen Änderungen. Ich verweise auf die Besprechungen: Monatsh. Math. **55**, 97—98 (1951) und **56**, 258 (1952).

N. Hofreiter, Wien

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Von *R. Rothe*. Herausgegeben von *W. Schmeidler*. Teil VI: Integration und Reihenentwicklung im Komplexen. — Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Von *I. Szabó*. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 45.) Mit 54 Textabb., 251 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 17.60.

Da die Anforderungen aus der Mathematik, die Industrie und Technik heute stellen, viel höher geworden sind, so ist eine vertiefte Ausbildung an den Technischen Hochschulen notwendig. Deshalb schreibt die Technische Hochschule in Berlin-Charlottenburg auch den Studenten des Bau- und Maschinenwesens Pflichtvorlesungen aus höherer Mathematik durch fünf Semester vor und gibt damit ein nachahmenswertes Beispiel den anderen Technischen Hochschulen. Vor allem ist eine viel gründlichere Ausbildung in der Funktionentheorie und der Theorie der Differentialgleichungen notwendig geworden. Dem trägt dieser Band, der von *I. Szabó* neu herausgegeben wurde, Rechnung. Während bisher nur ganz wenig über komplexe Funktionen und über Integrationen im Komplexen gebracht wurde, wird nun die Integration im Komplexen wesentlich erweitert. Ferner werden Reihenentwicklungen im Komplexen durchgeführt und die Eulerschen Integrale behandelt. Band III brachte zwar schon einiges über Differentialgleichungen. Nun wird die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Hilfe der erworbenen funktionentheoretischen Kenntnisse weitergeführt und es werden die wichtigsten in der Mathematischen Physik auftretenden speziellen linearen Differentialgleichungen ausführlich behandelt. Zuletzt wird auch kurz auf partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung eingegangen. Obwohl das Buch von einem neuen Verfasser geschrieben wurde, paßt es sich an die früheren Bände sehr gut an. Sehr vorteilhaft ist die

Auswahl des Stoffes. Die Darstellung ist wohl knapp, aber sehr klar und wohl ausgeglichen. Das Buch enthält eine sehr große Anzahl interessanter Aufgaben mit Anleitungen zu den Lösungen. Dem Band VII, der von Randwertaufgaben und Eigenwertproblemen handelt, sieht man mit großem Interesse entgegen.

N. Hofreiter, Wien

Eindeutige analytische Funktionen. Von *R. Nevanlinna*. Zweite, verbesserte Auflage. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band XLVI.) Mit 24 Textabb., X, 379 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 46.50, geb. DM 49.50.

Es ist außerordentlich zu begrüßen, daß dieses Standardwerk durch eine neue Auflage dem mathematischen Publikum wieder zugänglich gemacht wurde. Da die erste Auflage in der vorliegenden Zeitschrift besprochen wurde (Mh. Bd. 45 (1937)), so ist es nur notwendig, die Änderungen gegenüber dieser Auflage anzugeben, von denen nur die wichtigsten hervorgehoben werden sollen: Im dritten Kapitel (Funktionentheoretische Majorantenprinzipien) wurde das Prinzip der Anzahlfunktionen von *O. Lehto* aufgenommen, im vierten Kapitel wird die Untersuchung von *O Teichmüller* zum Ideenkreis der *Ahlfors*schen Verzerrungssätze behandelt. Im fünften Kapitel wurde der Paragraph über die *Green*'sche Funktion ausführlicher gestaltet und die metrischen Eigenschaften der Punktmengen vom harmonischen Maß konnten abschließender behandelt werden, als dies noch bei der ersten Auflage möglich war.

Der zweite Hauptsatz (Kapitel 9) wird jetzt auch nach der Methode von *F. Nevanlinna* in der Fassung von *K. J. Virtanen* bewiesen, welche als Verallgemeinerung der ursprünglichen *Picard*schen Beweismethoden seines Satzes angesprochen werden kann. Ein Problem, welches in der ersten Auflage noch offen blieb, ob es meromorphe Funktionen gibt, für welche defekte Werte nicht Zielwerte sind, ist jetzt durch die Beispiele von *O. Teichmüller* und *L. Schwartz* bejahend entschieden. Eine Berichtigung, welche der zweiten Auflage hinzugefügt ist, trägt nach, daß *W. K. Hayman* sogar ganze Funktionen mit dieser Eigenschaft gefunden hat. Weiter ist aufgenommen das Beispiel von *D. Dugué*, welches zeigt, daß der Defekt von der Wahl des Nullpunktes $z = 0$ abhängt und ein Satz von *Valiron* der angibt, wann dies nicht der Fall ist.

Der letzte Paragraph des Buches bringt eine ausführlichere Darstellung der quasikonformen Abbildungen (in der ersten Auflage Abbildungen mit beschränkter Exzentrizität genannt). Das Literaturverzeichnis wurde auf den neuesten Stand gebracht.

E. Hlawka, Wien

Uniformisierung. Von *R. Nevanlinna*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden: Band LXIV.) Mit 22 Textabb., IX, 391 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 46.50, geb. DM 49.50.

Die große Monographie, die aus der Feder des bekannten Verfassers vorliegt, entspricht einem allgemein gefühlten Bedürfnis. Denn seit den großen Entdeckungen von *Poincaré* und *Koebe* hat wohl jedes umfassendere Werk über Funktionentheorie diesem aktuellen Kapitel mehr oder weniger Raum gegönnt, es fehlte aber bislang an einer erschöpfenden Zusammenfassung des großen

Materials. Eine solche haben wir nun vor uns, und es kann gleich gesagt werden, daß sie wohl allen gerechten Ansprüchen genügen wird.

Ausgehend von einer sehr allgemeinen, in der Einleitung formulierten Fassung des Problems legt der Verfasser in aller Ausführlichkeit zunächst die topologischen und funktionentheoretischen Fundamente. Hier ist vor allem die Darstellung der Theorie der *Riemann*schen Flächen hervorzuheben, die sich an das Vorbild von *H. Weyl* anschließt, aber noch etwas tiefer in die topologischen Verhältnisse eindringt, sowie die Fassung des Differentialbegriffs mit den Begriffen der Tensorrechnung. Die im folgenden benötigten Existenzsätze über die Lösung der ersten Randwertaufgabe gewinnt der Verf. mit dem alternierenden Verfahren von *Schwarz*, dem er eine solche Wendung gibt, daß es gleichzeitig zum Beweis der Tatsache führt, daß jede *Riemann*sche Fläche, als topologischer Raum betrachtet, dem Abzählbarkeitsaxiom genügt, so daß nicht, wie bei *Weyl*, die Triangulierbarkeit vorausgesetzt werden muß. Es folgt ein Abschnitt über geschlossene *Riemann*sche Flächen, der bis zur Definition der Differentiale der drei Gattungen führt, und hierauf wird das allgemeine, vom Verf. als „*Riemann*scher Abbildungssatz" bezeichnete Theorem über die konforme Abbildung der einfach zusammenhängenden Flächen auf die Normalgebiete bewiesen (elliptischer Fall: Vollkugel, hyperbolischer Fall; Einheitskreis, parabolischer Fall: Vollebene). Hierauf wird die Gruppe der Selbstabbildungen der Normalgebiete betrachtet. Dies führt insbesondere im hyperbolischen Fall zum Begriff des Fundamentalpolygons, von dem bereits in dem Abschnitt über geschlossene Flächen vorgreifend Gebrauch gemacht wurde. Nun kann durch Abbildung der universellen Überlagerungsfläche auf ein Normalgebiet die Struktur der *Riemann*schen Fläche weitgehend geklärt werden, insbesondere ergibt sich unmittelbar die Triangulierbarkeit und für geschlossene Flächen der Begriff des Geschlechts. Dann wird das allgemeine Uniformisierungsproblem in Angriff genommen, eine mehrdeutige Abbildung zweier *Riemann*scher Flächen aufeinander durch zwei eindeutige Abbildungen darzustellen. Hierzu ist die Herstellung einer gemeinsamen Überlagerungsfläche nötig; es gelingt insbesondere die Ermittlung der „schwächsten" Uniformisierenden, durch Herstellung jener gemeinsamen Überlagerungsfläche, der jede andere überlagert ist. Damit ist dann die allgemeinste Lösung des Problems gefunden. Spezielle Ausführungen über schlichtartige Flächen sowie über die noch im Ausbau begriffene Theorie der offenen Flächen, an deren Werden der Verfasser wesentlichen Anteil hat, beschließen das schöne Buch, das sicher für lange Zeit die maßgebende Darstellung des ganzen Fragenkomplexes bleiben wird. Fügen wir noch hinzu, daß der Verf. sich mit Erfolg bemüht hat, dem Leser in Bezug auf Deutlichkeit und Verständlichkeit bis an die Grenzen des möglichen entgegenzukommen, so glauben wir nicht zuviel gesagt zu haben.

J. Radon, Wien

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt von *L. Bieberbach*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden: Band LXVI.) IX, 338 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 36.—, geb. DM 39.60.

Seiner altbekannten und bewährten „Theorie der Differentialgleichungen", die das weite Gebiet allseitig zu erfassen sucht, setzt nun der Verf. ein Spezialwerk zur Seite, das dem engeren Gebiet der funktionentheoretischen Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen gewidmet ist. Die bekannten Vorzüge der

Lehrbücher *Bieberbachs*, vor allem sein Geschick, überall die wesentlichen Gedanken klar herauszuarbeiten und methodisch niemals einseitig zu sein, wird man in seinem neuen Werk wiederfinden.

Das Werk beginnt natürlich mit dem Existenzbeweis für die Lösungen an einer regulären Stelle, der sowohl auf die Art *Picards* wie auch nach der Majorantenmethode geführt wird, und schließt daran sofort grundsätzliche Bemerkungen über die singulären Stellen der Lösungen. Hier wird eine Schlußweise von *Painlevé* herausgearbeitet, die zur Diskussion des Zusammenhangs der Singularitäten der Lösungen und denen der Differentialgleichungen führt. Es folgt die Behandlung der Gleichung $\frac{dw}{dz} = (aw + bz) : (cw + dz)$ als Vorbereitung für die allgemeine Behandlung der einfachsten Singularität. Diese wird unter dem Gesichtspunkt der Einteilung der Gleichungen in Klassen äquivalenter, d. h. durch eine umkehrbare analytische Transformation in einander überführbarer Gleichungen ziemlich weitgehend durchgeführt. Nur kurz wird die Lehre von den singulären Lösungen berührt, das gleiche gilt von der Verallgemeinerung auf Systeme.

Nachdem so die Verhältnisse „im Kleinen" geklärt sind, folgen Betrachtungen „im Großen", zunächst die Unterscheidung von festen und beweglichen Singularitäten, hierauf ein Satz von *Malmquist* über Differentialgleichungen erster Ordnung, deren rechte Seite eine rationale Funktion ist. (Die hiezu erforderlichen tiefer liegenden Hilfsmittel aus *Nevanlinnas* Theorie der meromorphen Funktionen werden kurz hergeleitet.) Einige weitere Ergebnisse aus neuerer Zeit, über die z. T. nur berichtet wird, sowie ein kurzer Bericht über algebraische Differentialgleichungen beschließen den ersten, hauptsächlich der Theorie einer allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung gewidmeten Teil.

Es folgt nun die Behandlung der linearen Gleichungen. Hier spielt natürlich zuerst die Behandlung der singulären Stellen die Hauptrolle. Der Konvergenzbeweis für die Reihenentwicklungen an einer Stelle der Bestimmtheit wird auf eine besonders einfache von *G. Lyra* angegebene Weise erbracht, die Unbestimmtheitsstellen werden zunächst nach einer 1876 von *M. Hamburger* angegebenen Methode behandelt, die hier dankenswerterweise der Vergessenheit entrissen wird. Dann wird die Struktur der allgemeinen Fundamentalsysteme auf eine originelle, sehr elementare, aber doch vielleicht etwas umständliche Methode hergeleitet. Es folgen Untersuchungen von *Perron* über Lösungen, die sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten und ein kurzer Hinweis auf *Thomés* Normalreihen, ohne daß auf das Problem der asymptotischen Integration eingegangen würde. Nach allgemeinen Ausführungen über die *Fuchs*sche Klasse wird die hypergeometrische Gleichung ausführlich behandelt. Hier sei besonders auf die sorgfältige Behandlung der analytischen Fortsetzung der Lösungen sowie auf die Ausführungen über das *Riemann*sche Problem hingewiesen. Dann wird die *Bessel*sche Gleichung betrachtet, hier wird insbesondere der asymptotischen Integration Beachtung geschenkt. Auch die auf *Liouville* zurückgehenden, in neuer Zeit von *Ritt* und anderen wieder aufgenommenen Untersuchungen über die Integration durch elementare Funktionen sind hier wiedergegeben. Die *Fuchs*sche Gleichung mit vier singulären Stellen bietet Anlaß, das Uniformisierungsproblem anzuschneiden, auch findet hier einiges über Randwertaufgaben, die sonst in dem Buch nicht berührt werden, seinen Platz. Der vorletzte Abschnitt behandelt die linearen Gleichungen mit periodischen Koeffizienten; u. a. wird das Stabilitätskriterium von *Liapounoff* hergeleitet. Im letzten Abschnitt kehrt der Verf. zu den nichtlinearen Gleichungen zurück,

bringt hier zuerst ein Referat über die Transzendenten von *Painlevé*, dann den Beweis von *Ostrowski* für den Satz von *Hölder* über die Γ-Funktion, den *Hurwitz*schen Satz über Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten, die einer algebraischen Differentialgleichung genügen, sowie verwandte Untersuchungen von *Pólya* und *Wittich*. Der Titel dieses Abschnitts (Einiges über nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung) ist wohl nur aus Versehen stehengeblieben.

Die gegebene knappe Übersicht zeigt, wie reich das Programm ist, dessen Bearbeitung der Verf. unternommen hat und daß er bestrebt war, auch neueste Ergebnisse in seine Darstellung aufzunehmen. Hier finden sich auch zahlreiche Hinweise auf die Literatur, die es dem Leser ermöglichen, den Kontakt mit der zeitgenössischen Forschung aufzunehmen. In seiner Darstellung ist der Verf. oft eigene Wege gegangen und hat in vielen Einzelheiten auch altbekannten Dingen den Stempel seiner Persönlichkeit aufzudrücken gewußt. So ist ein Buch entstanden, das Lernenden und Lehrenden reiche Anregungen und geistigen Gewinn bringen wird.

J. Radon, Wien

Bernstein Polynomials. Von *G. G. Lorentz*. (Mathematical Expositions: Nr. 8.) Mit 9 Textabb., X, 130 S. Toronto: University of Toronto Press. 1953. $ 5.75.

Die Polynome, die von *S. Bernstein* eingeführt wurden, um den *Weierstraß*schen Approximationssatz auf einfache Art zu beweisen, sind seit längerer Zeit Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Es ist daher zu begrüßen, daß hier erstmalig der Versuch unternommen wird, die Ergebnisse dieser Untersuchungen in einer Monographie geschlossen darzustellen. Die zu einer im Intervall 0,1 definierten Funktion $f(x)$ sind so definiert $B_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C(k,n) x^k (1-x)^{n-k}$ wobei $C(k, n)$ den k-ten Binomialkoeffizienten der Ordnung n bedeutet. Kap. 1 ist der Untersuchung der Polynome im Reellen gewidmet; insbesondere werden hier die Fragen behandelt, wann die B_n gegen $f(x)$ konvergieren, wie schnell sie konvergieren und dieselben Fragen für die Ableitungen der B_n. Die Antworten sind natürlich von den Voraussetzungen abhängig, die für f gemacht werden. Das folgende Kapitel bringt verschiedene interessante Verallgemeinerungen der Polynome B_n, z. B. zur Approximation von Funktionen, die nur als meßbar (aber nicht notwendig integrabel) vorausgesetzt werden. Hier finden sich auch Zusammenhänge mit der Theorie der Summierungsverfahren. Das dritte Kapitel ist überschrieben mit „Funktionenräume und Momenten-Probleme". Nach einführenden Bemerkungen über *Banach*-Räume, werden die linearen Funktionale und die damit zusammenhängenden Momentenprobleme für verschiedene Klassen solcher Räume besprochen. Auch die *Hausdorff*schen Summationsmethoden ordnen sich hier ein. Das vierte und letzte Kapitel beschäftigt sich mit dem Verhalten der *Bernstein*-Polynome im Komplexen. Wir finden hier u. a. Untersuchungen über die Bereiche der Konvergenz der B_n, Integraldarstellungen und asymptotische Formeln für die B_n; die Erforschung der Eigenschaften der B_n für komplexe Werte des Argumentes ist jedoch bei weitem nicht abgeschlossen.

Das Buch gibt sich in sehr anspruchsloser Form und ist in der Darstellung äußerst klar gehalten. Seine Lektüre wird jedem eine Freude sein, der sich für Analysis interessiert.

K. Prachar, Wien

Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Von *J. Lense*. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 48 Textabb., 216 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953. DM 26.—.

Das Buch beginnt mit Reihenentwicklungen, Fourierschen Reihen, asymptotischen Reihen, Bernoullischen Polynomen, näherungsweiser Berechnung bestimmter Integrale. Dann kommt eine ausführliche Darstellung der Gammafunktion. Es folgen: Orthogonalfunktionen, insb. *Laguerre*sche, *Hermite*sche und *Tschebyscheff*sche Polynome. Am umfangreichsten werden *Bessel*- und Kugelfunktionen behandelt. Zuletzt werden *Lamé*sche Funktionen betrachtet. Es sind wohl einige funktionentheoretische Vorkenntnisse notwendig, um das Buch zu verstehen, aber nicht mehr als man vom Leser, der in den meisten Fällen theoretischer Physiker ist, annehmen kann. Die Darstellung ist sehr klar. Die Auswahl des Stoffes ist gerade recht, weder zu wenig, noch zu viel. Dies hat gewiß dazu beigetragen, daß schon die dritte Auflage notwendig wurde. *N. Hofreiter*, Wien

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Von *R. Zurmühl*. Mit 114 Textabb., XI, 481 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. Geb. DM 28.50.

Die Vorlesungen über Mathematik an den Technischen Hochschulen werden zwar für den angehenden Diplomingenieur gehalten. Sie bringen aber nur eine Einführung in die höhere Mathematik — in erster Linie: Differential- und Integralrechnung und Differentialgleichungen, und zur praktischen Mathematik, wie sie der Ingenieur oft braucht, findet sich meist nicht genügend Zeit. Eine Ergänzung ist daher meist notwendig und dringend erwünscht. Dies geschieht in dem vorliegenden Buch. Bei der Stoffauswahl und der Art der Darstellung wird auf den Ingenieur und Physiker besonders Rücksicht genommen. Das Buch besteht nicht aus einer Menge technisch interessanter Beispiele. Damit allein, ja selbst einschließlich der Anweisungen, wäre der Weiterbildung des Diplom-Ingenieurs wenig gedient. Das Buch ist ein Lehrbuch, in dem die Probleme ihrem mathematischen Gehalt nach erfaßt und gelöst werden. Lösung eines Problems ist im Sinne der angewandten Mathematik zu verstehen, also Behandlung bis zum fertigen Zahlenergebnis. Dadurch bekommt der Leser ein wirkliches Verständnis und weiß mit den erworbenen Kenntnissen bei den vielgestaltigen Aufgaben, die an ihn herantreten, etwas anzufangen. Ich beschränke mich darauf, schlagwortartig auf den Inhalt einzugehen: Numerische Auflösung von Gleichungen, Stabilitätskriterien, lineare Gleichungssysteme, Matrizenrechnung, Eigenwertprobleme, Interpolation, numerische und graphische Integration, Ausgleichsrechnung, harmonische Analyse, Approximation von willkürlichen Funktionen, gewöhnliche Differentialgleichungen, Anfangswertaufgaben, Rand- und Eigenwertaufgaben. Es ist naheliegend, daß die linearen Probleme am ausführlichsten behandelt werden. Als vorteilhaft erweist sich die starke Heranziehung der Matrizenrechnung. Aus der Fülle der existierenden Methoden werden die bewährtesten ausgewählt und ausführlich dargestellt. Das Buch enthält eine sehr große Anzahl interessanter und praktisch wichtiger Aufgaben. Die Darstellung ist den Vorkenntnisse und der Auffassungsgabe des angehenden Ingenieurs angepaßt und sehr gut verständlich. Obwohl es gewiß schon einige gute Bücher über praktische Mathematik gibt, so ist dieses Buch eine sehr wertvolle Ergänzung der vorhandenen Literatur. Es ist den angewandten Mathematikern, Physikern und Ingenieuren wärmstens zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

Some Theory of Sampling. Von *W. E. Deming*. XVII, 602 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1950.

Der bekannte Verfasser beschäftigt sich zunächst in seinem Werk mit den Fragen der Erhebung, also mit dem Problemkreis, mit dem sich jeder Sta-

tistiker zunächst beschäftigen muß, bevor er die Theorie der Statistik auf das konkrete ihm vorliegende Problem anwenden kann. Es sei nur auf die wichtige Frage der Nichtbeantwortung bei Stichprobenerhebungen hingewiesen. Dann beschäftigt sich das Buch mit der Theorie der Statistik. Es werden nur geringe Vorkenntnisse vorausgesetzt, aber das Buch bleibt nicht in den Anfangsgründen stecken. So wird z. B. zueinandergesetzt: Mehrstufige, geschichtete Stichproben, einfaches und doppeltes Stichprobenverfahren, sequential analysis (in einer der Praxis sehr angepaßten Art), Konfidenzintervalle, Stichprobentheorie der normal verteilten Grundgesamtheiten usw. Die Theorie wird immer unterstützt durch eine Fülle von Beispielen und Winken aus der reichen Praxis des Verfassers. Dieses Buch kann jedem, der die Statistik anzuwenden hat, nur wärmstens empfohlen werden. Die Darstellung ist sehr klar und gut verständlich, die Ausstattung des Buches ist ausgezeichnet. *E. Hlawka*, Wien

Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Von *L. Fejes Tóth.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden: Band LXV.) Mit 124 Textabb., X, 197 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 24.—, geb. DM 27.—.

Minkowski und viele Autoren der Geometrie der Zahlen betrachten Lagerungsprobleme, bei denen die Anordnungen gewissen Regularitätsbedingungen unterworfen sind (z. B. gitterförmige Anordnungen). Hier hingegen werden Lagerungsprobleme betrachtet, bei denen auch beliebige irreguläre Anordnungen zugelassen werden. Als Grundprobleme werden folgende zwei Extremalaufgaben gestellt: 1. Wie klein kann der Inhalt eines konvexen Gebietes sein, in das ein gegebenes System von konvexen Scheiben ohne Überdeckung eingelagert werden kann (dichteste Lagerung)? 2. Wie groß kann der Inhalt eines konvexen Gebietes sein, das durch die Scheiben des gegebenen Systems überdeckt werden kann (dünnste Überdeckung)? Um diese zwei Probleme gruppiert sich eine Fülle von weiteren interessanten Fragestellungen. Die Problemstellung ist meist einfach und anschaulich sehr einleuchtend, aber den Beweisen stellen sich oft Schwierigkeiten entgegen, die man meist gar nicht erwartet. So wissen wir z. B. heute noch nicht, welches die dichteste Lagerung von kongruenten Kugeln im Raum ist. Ist sie gitterförmig, wie dies bei den Kreisen in der Ebene der Fall ist, oder ist dies nicht der Fall? Einfach aussehende, aber doch schwierige und noch wenig gelöste Probleme sind folgende: Mit welchen konvexen Bereichen läßt sich die Ebene 1. am schlechtesten ausfüllen, 2. am unwirtschaftlichsten überdecken?. Bei vielen Problemen, besonders in der Ebene zeigt es sich, daß die reguläre Gestalt der Extremalfigur eine Folge der Extremalforderung ist. Von besonderer Wichtigkeit ist der Begriff der Dichte eines Systems. Abschätzungen der Dichte nach oben und unten sind daher von zentraler Bedeutung und besonders wichtig ist die Frage, wann dabei das Gleichheitszeichen eintritt. Der Autor war in ganz besonderem Maße dazu berufen, dieses Buch zu schreiben. Eine sehr große Anzahl von interessanten und hier dargestellten Sätzen sind ihm zu verdanken. Er zeigt uns, daß der hier behandelte Problemkreis eine unerschöpfliche Fundgrube von weiteren interessanten Problemen ist, von denen nur ein Teil bisher behandelt wurde. Die Theorie ist noch lange nicht abgeschlossen, sondern befindet sich in stetem Fluß. Der Verfasser gibt von manchen Sätzen mehrere Beweise, denn auch die Methoden sind von Wichtigkeit. Manchmal muß er sich darauf beschränken, zu zeigen, wo die Schwierigkeit liegt und er gibt Richtungen an, in

denen die Beweise vielleicht geführt werden können. Es kommt auch vor, daß der Verfasser nur Vermutungen stellt, ja sogar, daß er gesteht, daß wir heute noch nicht einmal einigermaßen fundierte Vermutungen haben. Die Darstellung ist in hohem Maße anschaulich und zum Verständnis sind nur geringe Kenntnisse aus der Geometrie und Analysis nötig. *N. Hofreiter*, Wien

Tensor Calculus. Von *B. Spain*. VIII, 125 S. Edinburgh und London: Oliver and Boyd. — New York: Interscience Publishers, Inc. 1953. Geb. 8 s. 6 d. net.

Das vorliegende Büchlein soll eine Einführung in die Tensorrechnung und einige Anwendungen geben. Es ist für Studenten der mittleren Semester gedacht und es sind daher allzu spezielle Dinge nicht aufgenommen worden. Die ersten beiden Kapitel bringen ausführlich die Algebra der Tensoren, Kapitel drei bis fünf sind der Tensoranalysis gewidmet, das letztere insbesondere dem *Riemann*schen Krümmungstensor. Dann folgt eine sehr gut gelungene Darstellung des Zusammenhanges der dreidimensionalen (euklidischen) Differentialgeometrie mit der Tensorrechnung, die für den Studierenden besonders instruktiv sein wird. Das nächste Kapitel bringt Anwendungen, hauptsächlich aus der Elastizitätstheorie und das letzte Kapitel eine Einführung in die mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie und der kosmologischen Modelle von *Einstein* und *de Sitter*.

Das Buch ist vor allem durch Prägnanz in der Ausdrucksweise und große Verständlichkeit gekennzeichnet. Der Verfasser hat großen Wert darauf gelegt, den Leser über kein auch noch so unbedeutendes Detail im Unklaren zu lassen. Zahlreiche lehrreiche Aufgaben sind eine weitere wertvolle Unterstützung für den Lernenden und so kann das Buch jedem empfohlen werden, der eine kurze aber doch nicht oberflächliche Einführung in die Tensorrechnung wünscht.

K. Prachar, Wien

Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe. Von *K. Reidemeister*. Zweite Auflage. („Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik". Herausgegeben von A. Kratzer: Reihe A, Band 17.) Mit 69 Textabb., XI, 196 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1953. Geb. DM 14.—.

Es ist sehr erfreulich, daß dieses Standardwerk über Polyedertopologie in zweiter Auflage erschienen ist. Gegenüber der ersten Auflage (siehe die Besprechung in Monatshefte **49**, 28 (1941) wurde nichts wesentliches geändert.

K. Prachar, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Vorlesungen über höhere Mathematik. Von Doktor phil. **Adalbert Duschek,** o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien.

Vor kurzem erschien:

Band 3: **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.** Mit 107 Textabbildungen. IX, 512 Seiten. 1953.

S 220.–, DM 36.50, $ 8.70, sfr. 37.40; Gln. S 235.—, DM 38.80, $ 9.25, sfr. 39.80.

„Das vorliegende Buch stellt den dritten Band eines im ganzen vierbändigen Werkes über höhere Mathematik dar, das sich in erster Linie an Physiker und Techniker wendet. Das Studium dieses Werkes soll ihnen das Rüstzeug verschaffen, das sie befähigt, fremde theoretische Arbeiten ihres Fachgebietes zu verstehen und kritisch zu durchdenken und möglicherweise auch eigene Arbeiten zu schaffen. ... In allen wesentlichen Punkten dürfte der Verfasser mit diesem Band seines Lehrbuches das sich gesteckte Ziel erreicht und ein Buch geschaffen haben, das in leicht lesbarer Darstellung eine recht gründliche Kenntnis des für den Physiker und Techniker wichtigsten mathematischen Rüstzeugs vermittelt. Der Berichter glaubt, es zu diesem Zweck mit gutem Gewissen empfehlen zu können ..." *ETZ Elektrotechnische Zeitschrift*

Früher erschienen:

Band 1: **Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. 1949.

S 99.–, DM 26.–, $ 6.20, sfr. 27.–; Ganzleinen S 110.–, DM 29.–, $ 6.90, sfr. 30.–.

Band 2: **Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder.** Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten. 1950.

S 99.–, DM 26.–, $ 6.20, sfr. 27.–; Ganzleinen S 110.–, DM 29.–, $ 6.90, sfr. 30.–.

In Vorbereitung:

Band 4: **Randwertprobleme. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplacetransformation.**

Jeder Band ist einzeln käuflich.

Soeben erschien:

Bau und Bildung der Kristalle. Die Architektonik der stofflichen Welt. Von Prof. Dr. **Franz Raaz,** Mineralog.-petrogr. Institut der Universität Wien, und Prof. Dr. **Alexander Köhler,** Institut für angewandte Mineralogie der Technischen Hochschule Wien. Mit 166 Textabbildungen. V, 185 Seiten. 1953.

Ganzleinen S 96.—, DM 18.–, $ 4.30, sfr. 18.50.

Kristalle entschleiern den Aufbau der stofflichen Welt. Kristalle bilden die Brücke von der toten Materie zum Leben. Kristalle erschließen der modernen Technik überraschende Möglichkeiten. Hier ist ein in anregender und leichtverständlicher Form geschriebenes Buch, das dem Nichtfachmann die Grundprinzipien und aktuellen Probleme eines tiefschürfenden Wissensgebietes erschließt, das gleichzeitig die großartigsten Ausblicke nach verschiedenen Richtungen bietet.